Statistique

Troisième secondaire

Livre de l'élève

Statistique

Troisième secondaire

Livre de l'élève

Nom : ....

Classe : ....

Ecole : ....

Auteurs

Mr. Kamal Younis Kabsha

Prof.Dr. Ahmed Kamal El-kholy

Premiére édition 2016 / 2017

Numéro de dépôt 8701 / 2016

I.S.B.N 5 - 029 - 706 - 977 - 978

SAKKARA PUBLISHING

Introduction

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous sommes heureux en présentant ce livre d'expliquer la philosophie à travers laquelle a été établie la matière éducative qui peut être résumée comme suit:

1. Développer l'unité des connaissances et sa complémentarité en mathématiques, et l'intégration des concepts et l'interdépendance entre tous les domaines des mathématiques scolaires.
2. Fournir à l'apprenant ce qui est fonctionnel à partir des informations , des concepts et des plans pour résoudre les problèmes.
3. Adopter l'entrée de normes nationales pour l'enseignement en Egypte et les niveaux d'enseignement et cela à travers.
   a) Déterminer ce que l'apprenant devrait apprendre et pourquoi l'apprendre.
   b) Déterminer avec précision les résultats d'apprentissage qui ont mis l'accent sur les points suivants:

   Que l'apprentissage des mathématiques soit un objectif auquel aspire l'apprenant tout au long de sa vie – que l'apprenant soit proactif et intéressé aux mathématiques – que l'apprenant soit capable de travailler seul ou en équipe – que l'apprenant soit actif, persévérant, studieux et créatif – que l'apprenant soit en mesure de communiquer avec la langue des mathématiques.
4. Proposer des moyens et des méthodes d'enseignement à travers le livre (le guide de l'enseignant).
5. Proposer des activités variées en rapport avec le contenu pour que l'apprenant choisisse son activité adéquate.
6. Respecter les mathématiques et respecter les contributions humaines du monde entier, de la nation et de la patrie ; connaître également les contributions et les réalisations des savants musulmans, Arabes et étrangers.

Enfin ... nous espérons que nous avons réussi à réaliser ce travail pour le bien de nos enfants et notre chère Egypte

Sommaire

Première unité: Corrélation et Régression

1 - 1 Corrélation 4
1 - 2 Régression 16
Résumé de l'unité 26
Exercices généraux 27
Epreuve cumulative 29

Deuxième unité: Probabilité conditionnelle

2 - 1 Probabilité conditionnelle 32
2 - 2 Evénements indépendantes 41
Résumé de l'unité 48
Exercices généraux 49
Epreuve cumulative 51

Sommaire (suite)

Troisième Unité: Variables aléatoires et lois de probabilité

3 - 1 Variable aléatoire discrète 54

3 - 2 Moyenne arithmétique (espérance) , variance d'une variable aléatoire discrète 61

3 - 3 Fonction de densité d'une variable aléatoire continue 68

Résumé de l'unité 73

Exercices généraux 75

Epreuve cumulative 77

Quatrième Unité: Distribution normale

4 - 1 Distribution normale 80

4 - 2 Applications sur la distribution normale 94

Résumé de l'unité 100

Exercices généraux 101

Epreuve cumulative 103

Epreuves générales 105

Unité 1

Corrélation et régression

Introduction de l'unité

La Statistique est l'une des branches les plus importantes des mathématiques qui a de nombreuses applications. Elle s'intéresse a recueillir et représenter les données et les réduire sous forme d'indicateurs numériques pour décrire et mesurer ses caractéristiques de base et les analyser, afin de prendre des décisions adéquates en raison de leur grande importance pratique dans divers domaines des sciences physiques, humaines, économiques, sociales et d'autres.

Cette unité concerne l'analyse des données des deux variables et l'étude du degré et la nature de la relation entre eux et la forme de cette relation. Elle attache d'abord une importance à étudier la corrélation qui indique le degré et la force de la relation entre deux variables. Cette relation peut prendre la forme proportionnelle.

Il est à noter que la corrélation étudie la relation et la direction entre un variable et un autre, mais nous devons nous rendre compte que cette relation ne montre pas le lien de causalité car elle n'indique pas la présence d'une influence d'un variable sur un autre comme on le verra avec la première leçon de cette unité.

Cette unité aborde également l'étude de la régression linéaire simple qui s'intéresse à estimer la forme de cette relation et à partir de laquelle il est possible de prévoir la valeur du variable dépendant si nous connaissons la valeur du variable indépendant. Sa précision augmente chaque fois que l'échantillon sélectionné était au hasard, et nous allons aborder dans cette unité des techniques modernes : calculatrices scientifiques, programmes statistiques informatiques (tels que les logiciels SPSS) pour faire les calculs et de faire les graphiques propres à la corrélation et la régression linéaire entre deux phénomènes.

Objectifs de l'unité

A la fin de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Connaitre le sens de la corrélation et son degré
- Calculer le coefficient de corrélation par différentes méthodes (méthode de Person ; Spearman) et interpréter son sens
- Comprendre la signification de la droite de régression et son importance dans l'étude entre deux variables
- Représenter la relation entre deux variables dans un repère cartésien et vérifier l'existante et la dégrée de la relation
- Connaitre le sens du coefficient de régression et interpréter son sens
- Trouver l'équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés
- Utiliser la calculatrice et l'internet pour effectuer d'opérations numériques et les représentation graphiques des corrélations et régression.
- Utiliser l'équation de la droite de régression pour estimer la valeur d'une variable en connaissant la valeur de l'autre variable
- Appliquer la corrélation et la régression dans des situations quotidiennes
- Savoir l'importance d'utiliser la corrélation et la régression pour résoudre des problèmes quotidiennes et sociales

Vocabulaire de base

- *Corrélation*
- *Régression*
- *Corrélation linéaire*
- *Coefficient de corrélation*
- *Corrélation directe*
- *Corrélation indirecte*
- *Nuage de dispersion*
- *Coefficient de corrélation de Pearson*
- *Coefficient de corrélation de Spearman*
- *Droite de régression*
- *Moindres carrés*

Leçons de l'unité

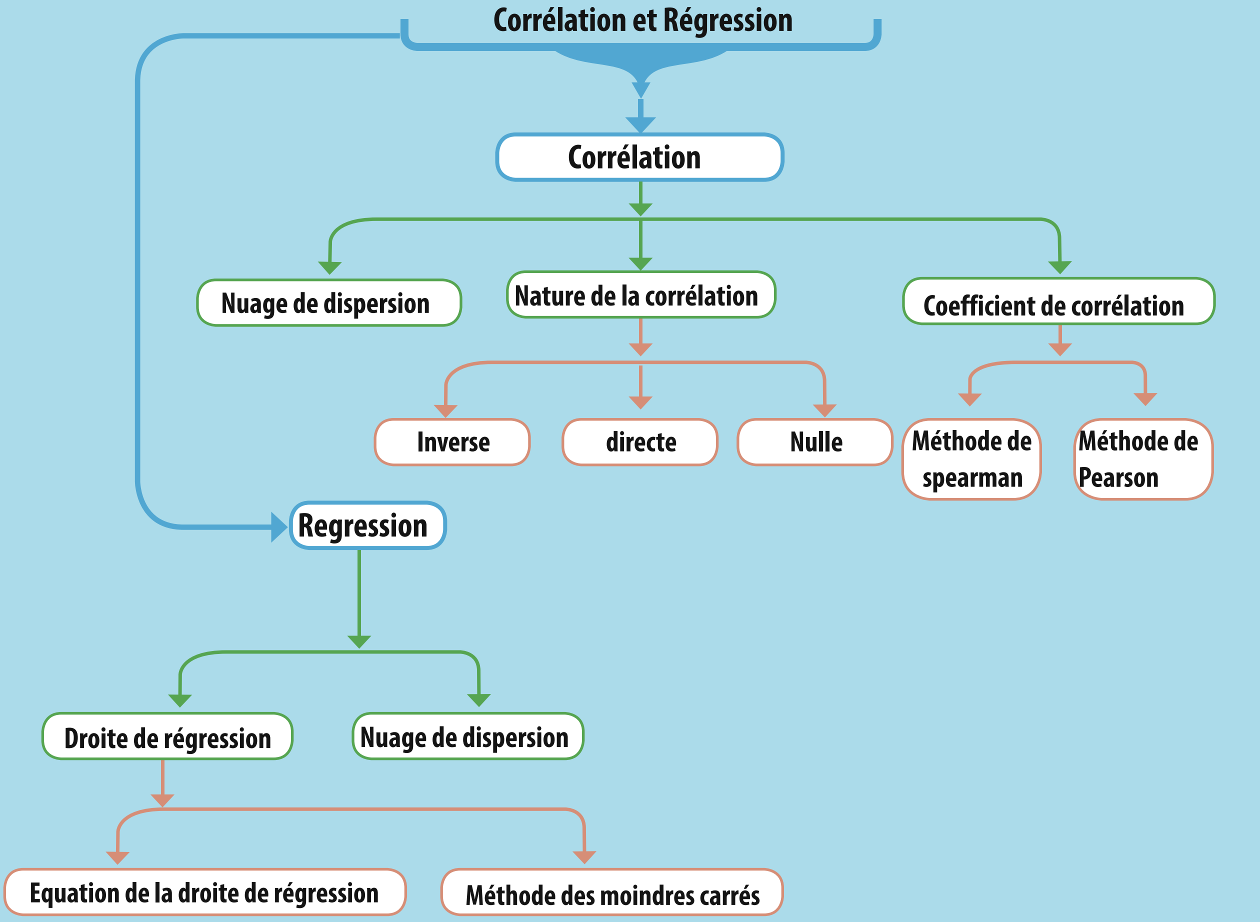
Leçon (1-1) Corrélation

Leçon (1-2) Régression

Matériels utilisés

Calculatrice scientifique- programme Excel- programme spss

Organigramme de l'unité



unité 1
1 - 1

Corrélation

A apprendre

- Corrélation
- Corrélation linéaire
- Coefficient de corrélation
- Corrélation directe
- Corrélation inverse
- Nuage de dispersion
- Coefficient de corrélation de Pearson
- Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Vocabulaire de base

- Coefficient de corrélation linéaire de Pearson
- Coefficient de corrélation des rangs de Spearman
- Définition de la corrélation
- Nuage de dispersion
- Corrélationdirecte et indirecte
- Coefficient de corrélation linéaire

Introduction:

On a déjà étudie dans les statistiques comment décrire un ensemble de datas représentant un phénomène en utilisant quelques grandeurs comme la dispersion et le coefficient de variation. Dans cette unité, tu vas étudier comment décrire la relation entre deux variables. Si l'une de ces deux variables varie dans une direction donnée (croissante ou décroissante), donc la deuxième variable va varier dans une direction donnée aussi (croissante ou décroissante). Dans cette situation, on dit que la corrélation est directe. Si l'une des deux variables varie de façon croissante et l'autre de façon décroissante (vise versa). On dit que la corrélation est indirecte si l'une des deux variables varie de façon croissante et l'autre de façon
décroissante (vise versa).

Corrélation:

Réfléchit et discute

Observez les exemples suivants et notez vos remarques:

1- La relation entre la longueur d'un carré et son aire.
2- La relation entre pression artérielle et l'âge.
3-Augmentation du prix d'une unité d'un produit et et la demande de l'acheter.
4- Diminution de la température et la demande de la consommation de l'énergie.
5-La relation entrel'altitude de la surface de la mère et l'augmentation de la température.

D'après les exemples précédents nous remarquons que:

- Les variables dépendantes varient dans le même sens, c-à-d l'augmentation ou la diminution de l'une implique l'augmentation ou la diminution de l'autre. Nous disons que : la corrélation entre elle est positive (directe).

Matériels utilisés
- Calculatrice scientifique

Dans les exemples 4 et 5, nous remarquons que les variables varient dans le sens inverse c-a-d l'augmentation ou diminution de l'une implique la diminution ou l'augmentation de l'autre. Nous disons que : la corrélation entre elles estnégative (indirecte).

Définition La corrélation est une méthode statistique pour déterminer le degré et la nature de la relation entre les deux variables.

La relation entre les deux variables est comprise entre une degré forte et une degré faible, quand la relation est forte, alors la connaissance de l'une des deux variable aide à prévoir la valeur de l'autre variable. quand la relation est faible , alors la connaissance de l'une des deux variable faible n'aide pas à prévoir la valeur de l'autre variable. L'une des méthodes qui nous aide à connaitre le degré de la relation et sa nature est déterminer le nuage de dispersion.

Nuage de dispersion

Définition Nuage de dispersion est une représentation graphique de quelques couples (x : y) pour décrire la relation entre deux variables.

Si la première variable est x , la deuxième est y, alors les figures suivantes montrent la relation entre x et y qui représente le nuage de dispersion.

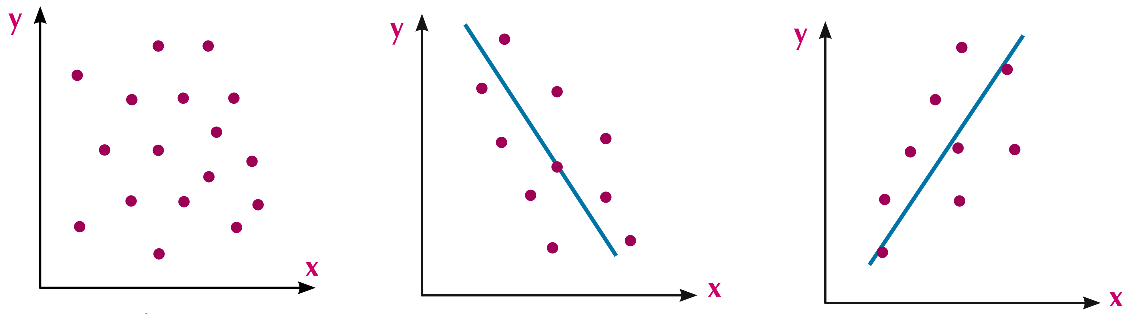


Figure 1 Pas de corrélation

Figure 2 Corrélation linéaire indirecte (négative)

Figure 3 Corrélation linéaire directe (positive)

Corrélation linéaire

Définition La corrélation linéaire est un grandeur de mesurer le degré entre deux variables.

Activité

Tracer le nuage de dispersion des datas suivants en déterminant la nature de la relation exprimant ses datas.

①

x	7	8	9	10	11	12
y	13	14	17	18	21	23

②

x	3	4	7	8	11	15
y	23	22	20	18	17	16

3

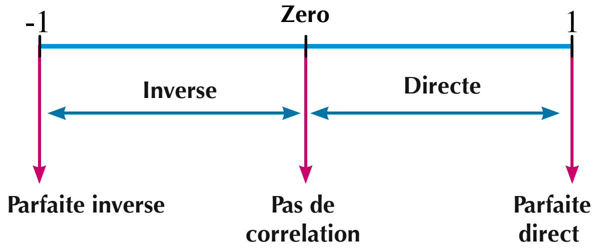
x	7	9	11	13	15	16
y	14	7	20	6	12	10

Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est noté (r). Elle est une quantité scalaire qui mesure le degré de la corrélation entre deux variables où $-1 \leqslant r \leqslant 1$. Nous disons que la corrélation est parfaite directe si le coefficient de corrélation r = 1,elle est parfaite, inverse si le coefficient de corrélation r = -1 et nulle (pas de correlation) si le coefficient de corrélation r = 0.

Nous remarquons que:

Si le coefficient de corrélation est très proche de 1, alors la corrélation est directe forte Si le coefficient de corrélation est très proche de 0, alors la corrélation est directe faible Nous disons la même chose pour la corrélation indirecte comme montre la figure ci-contre.



Expression orale : choix multiple:

Choisis la bonne réponse dans ce qui suit dans ce qui suit, le coefficient le plus forte est:

a – 0,8 b – 0,5 c 0,4 d 0,7

Coefficient de corrélation de Pearson

Un échantillon de n personnes nous a fourmi des valeurs pour les deux variables x et y.

Les valeurs de la première variable x sont: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$

Les valeurs de la deuxième variable y sont: $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$

Le coefficient de corrélation de Pearson entre les variables x et y ou le coefficient linéaire de corrélation est notér. Il est égale à:

$$P = \frac{n\,\Sigma x\,y - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

où: "Σ" signifie la somme.

$$\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots + x_n ,$$

$$\Sigma y = y_1 + y_2 + y_3 \ldots\ldots + y_n ,$$

$$\Sigma x\,y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ldots\ldots + x_n y_n$$

$$\Sigma x^2 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^2 \ldots\ldots + x^2_n ,$$

$$\Sigma y^2 = y_1^{\,2} + y_2^{\,2} + y_3^{\,2} \ldots\ldots + y_n^2$$

Exemple

① Le tableau suivant indique les notes de dix élèves en histoire et géographie.

Histoire x	75	80	93	65	87	71	98	69	84	78
Géographie y	82	78	86	72	91	80	95	73	89	74

Calcule le coefficient de corrélation de Pearson entre x et y en déterminant son degré et sa nature.

Solution

On forme le tableau suivant:

x	y	x^2	y^2	x y
75	82	5625	6724	6150
80	78	6400	6084	6240
93	86	8649	7396	7998
65	72	4225	5184	4680
87	91	7569	8281	7917
71	80	5041	6400	5680
98	95	9604	9025	9310
69	73	4761	5329	5037
84	89	7056	7921	7476
78	74	6084	5476	5772
$\Sigma x = 800$	$\Sigma y = 820$	$\Sigma x^2 = 65014$	$\Sigma y^2 = 67820$	$\Sigma xy = 66260$

$$\because P = \frac{n\,\Sigma x\,y - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\therefore P = \frac{10 \times 66260 - (800 \times 820)}{\sqrt{10 \times 65014 - (800)^2}\sqrt{10 \times 67820 - (820)^2}}$$

$$= \frac{6006}{\sqrt{10140}\ \sqrt{5800}} \simeq 0{,}8606$$

la corrélation est directe .

Essaye de résoudre

① D'après le tableau suivant:

x	20	23	24	25	28	30
y	35	31	30	27	29	28

Calculez le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y en déterminant sa nature

Utilisation de la calculatrice scientifique:

La plupart des calculatrices scientifiques disponibles dans le marché nous aide à trouver les résultats des opérations du tableau précédent ainsi que le coefficient de corrélation de la manière suivante:

La préparation de la calculatrice:

En appuyant sur MODE puis 3

Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)

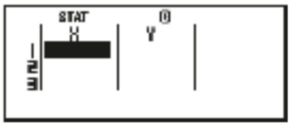
On choisit du menu apparaissant:

Paired-variable (X, Y), linear regression (y = A + Bx)	2 (A+BX)

L'insertion des informations:

On remplit les valeurs (x , y) du tableau indiqué dans la figure ci-contre en écrivant le nombre disponible dans le tableau =

MODE 3 (STAT) 2 (A+BX)



Une fois son écriture terminée, un appuie pour terminer toutes les valeurs (x ; y).

La recherche des résultats:

On appuie sur les touches SHIFT 1 (Start) on obtient: sum 3

A partir de ce menu, on choisi:

Σx^2: 1 , Σx: 2 , Σy^2: 3 , Σy : 4 , Σxy : 5

Et cela en appuyant sur les touches de 1 à 5 séparément.

Pour trouver le coefficient de corrélation (R) on appuie sur les touches suivantes:

(STAT) , De la liste suivante, on appuie sur 5 : Reg. De la liste apparue, on appuie sur 3 : R.

On obtient le coefficient de corrélation demandé entre les deux variables x et y.

Activités

Utilisez la calculatrice pour vérifier que la solution de l'exemple précédent est juste

Le logiciel SPSS statistique

Le logiciel SPSS est l'abréviation de (Statistical Package for the Social Sciences) ce qui veut dire les paquetages statistiques des sciences sociales.

Le logiciel SPSS est un ensemble des paquetages ou des données arithmétiques pour analyser ces données.

Ce logiciel est utilisé dans les recherches scientifiques contenant des données numériques :

Ce logiciel peut lire les donnes de tous les fichiers, les analyser et obtenir les résultats et les rapports statistiques.

Ce logiciel permet l'utilisateur de transformer les données sous forme de variables et de nouvelles données en utilisant une équation ainsi que la sauvegarde des données dans des fichiers, leurs nominations, la modification des noms des fichiers des données ou la récupération des données et des fichiers.

Et cela, à partir du contrôle de la liste des ordres et des choix disponibles dans le logiciel pour comprendre l'ensemble des étapes de l'analyse des données et l'opération statistique en 4 étapes suivantes :

1 - La symbolisation des données.

2 - L'insertion des données dans le logiciel.

3 - Le choix de la forme convenable, l'examinassions des données et leur analyse.

4 - La détermination des données variables qu'on veut analyser et la réalisation de l'opération statistique.

Le fonctionnement du logiciel SPSS:

Accédez à ce logiciel en appuyant sur la touche (Start) se trouvant dans le menu principal, accédez a la liste des programmes (Program), cherchez le logiciel (SPSS) et appuyez sur ce dernier deux fois afin d'y accéder.

Le contenu du logiciel et ses fonctionnalités:

La liste des commandes:

La liste des commandes utile pour le fonctionnement du logiciel. L'utilisateur choisi la commande qu'il veut en cliquant sur l'icône de chaque commande statistique et reçoit le résultat dans la liste des rapports.

La liste des commandes contient 9 commandes principales. En cliquant sur chacune, on obtient des listes secondaires autres que l'icône d'aide (Help)

L'affichage des données:

C'est un champ à partir duquel l'utilisateur peut contrôler l'insertion ou la suppression des données variables en ajoutant une variable indépendantes dans la colonne (Column) dans l'écran des données. L'utilisateur peut changer vers l'affichage des variables en basculant entre (Data View) et (Variable View) qui se trouvent en bas à gauche de l'écran des variables.

L'écran des variables:

L'écran des données variables se compose de colonnes parallèles contenant chacun les données propres à chaque variable. Pour afficher la définition de chaque variable, l'utilisateur appuie deux fois sur la souris (double click) ou appuie sur la commande (Variable View) qui se trouve en bas à gauche de l'écran des définitions et la liste suivante va apparaitre

Nom	Type
Volume	Valeurs

En appuyant sur cette liste, les valeurs apparaitront. Par la suite, On appuie sur la touche (Add) pour afficher la valeur du symbole et sa positon.

Des étapes contrôlables par l'utilisateur:

(1) **La possibilité de récupération des données précédentes**: L'utilisateur peut récupérer les données et les fichiers en appuyant sur la touche (File) puis sur la touche (Open) et choisi le fichiers contenant les données qu'il veut récupérer et qui contient les rapports statistiques effectués précédemment et enfin appuie sur la touche (Save).

(2) La sauvegarde des nouvelles variables dans un fichier: L'utilisateur peut sauvegarder les variables dans un fichier en appuyant sur la commande (Save) ou (Save as) pour effectuer la sauvegarde et nommer le fichier.

(3) L'insertion des modifications et la gestion des variables: L'utilisateur accède à la fenêtre (Data editor) et insère les données qu'il veut où il est capable de:

- Modifier les valeurs des données.
- Définir les variables ; en identifiant les types des données insérées, les indices économiques et les autres variables.

(4) L'utilisateur peut insérer une nouvelle variable afficher et visionner l'ordre des transactions effectuées à partir de la commande principale (Data) et procéder à tout changement souhaité tel que : insérer une variable, ajouter une nouvelle transaction ou changer l'ordre des données.

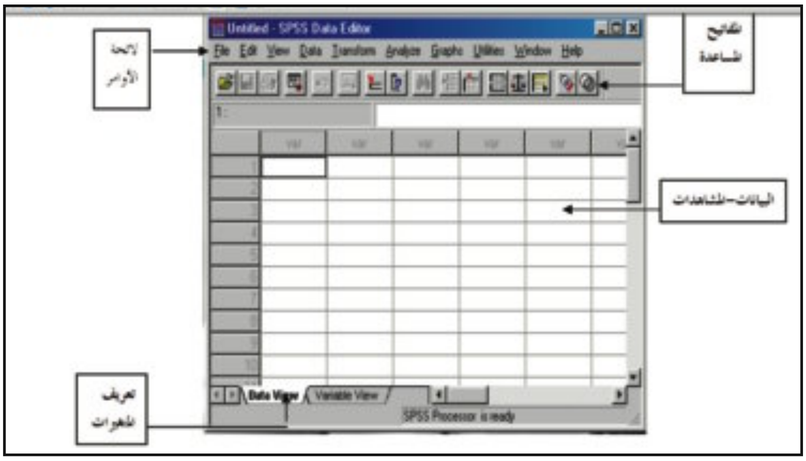
(5) La formation d'une nouvelle variable en utilisant une équation en accédant au menu principal (Transform), puis (Compute) et préciser un nom pour la nouvelle variable dans le menu (Targer Variable).

(6) La possibilité de supprimer une variable quelconque.

(7) La classification des transactions Le logiciel crée une nouvelle variable contenant une série de nombre dans le but de les classifier dans l'ordre croissant ou décroissant.

(8) Effectuer une opération statistique identifier la description statistique et la répétition des données.

(9) La possibilité de représenter les variables graphiquement pour afficher l'analyse des variables et l'interprétation des changements qu'ont subi les nouvelles variables.



Activité

Utilisez l'internet pour télécharger le logiciel (SPSS) du site: ***http://www-01.ibm.com/software/analytics/spss/*** Puis vérifiez que la solution de l'exemple précédent est juste.

Exemple

(2) Trouvez le coefficient de corrélation de Person entre les deux variables x et y en déterminant sa nature si.

$\Sigma x = 68$ $\Sigma y = 36$ $\Sigma xy = 348$

$\Sigma x^2 = 620$ $\Sigma y^2 = 204$ $n = 8$

Solution

$$\because r = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$\therefore r = \frac{8 \times 348 - (68 \times 36)}{\sqrt{8 \times 620 - (68)^2}\sqrt{8 \times 204 - (36)^2}} = \frac{336}{\sqrt{336}\sqrt{336}} = 1$$

La relation entre les deux variables x et y est directe parfaite car le coefficient de corrélation est 1.

Essaye de résoudre

2) Calculezle coefficient de corrélation de Pearson entre x et y en déterminant son degré et sa nature si.

$\Sigma x = 92$ $\Sigma y = 36$ $\Sigma xy = 372$

$\Sigma x^2 = 1100$ $\Sigma y^2 = 204$ $n = 8$

Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Réfléchit et discute

Un professeur de statistiques a fait une étude entre les résultats de deux matières scolaires pour 7 étudiants et les a inscrit dans le tableau suivant:

1ère	Faible	Passable	Faible	Bien	Faible	Excellent	Très Bien
2ème	Faible	Passable	Bien	Passable	Faible	Très Bien	Passable

Il n'est pas possible d'utiliser le coefficient de corrélation Pearson dans la section " Réfléchissez et discutez " parce qu'il est basé sur les datas scalaires (numériques) uniquement. Mais le cas des datas descriptives, on peut utiliser un autre coefficient de corrélation nommé coefficient de corrélation des rangs de Spearman. Il donne une valeur de corrélation pour tous datas (scalaires et descriptives).

Ce coefficient dépend de ranger les valeurs des variables dans un ordre croissant ou décroissant, puis en applique la relation suivante

$$r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2 - 1)}$$

Où D est la différence entre toutes les paires de rangs correspondants et n le nombre de paires de données.

Notice that:

- On peut calculer le coefficient des rangs de Spearman si les datas sont numériques ou descriptives mais on ne peut pas calculer le coefficient de Pearson si les dates sont descriptives.
- L'avantage du coefficient des rangs de Spearman est sa simplicité même si les datas ne sont pas rangés.
- Pourtant , son inconvénient est sa négligence des différences des nombres en calculant les ranges, il est donc moins précis.

Exemple

(3) Calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman dans (Réfléchissez et discutez) en déterminant sa nature et son degré.

Solution

Dans cet exemple, on range les mentions des deux matières dans l'ordre croissant ou décroissant comme montre le tableau suivant.

Première matière	Faible	Passable	Faible	Bien	Faible	Excellant	Très bien
Rang avec répétation	1	4	2	5	3	7	6
Rang final	2	4	2	5	2	7	6

On remarque que la mention faible est répété 3 fois et est occupé les places 1 ; 2 ; 3.

donc le rang de chacun d'eux = $\frac{1+2+3}{3}$ = 2 (c'est la moyenne arithmétique des nombres 1 ; 2 ; 3).

Deuxième matière	Faible	Passable	Bien	Passable	Faible	Très bien	passable
Rang avec répétation	1	3	6	4	2	7	5
Rang final	1,5	4	6	4	1,5	7	4

On remarque que la mention faible est répété 2 fois et est occupé les places 1 ; 2.

donc le rang de chacun d'eux = $\frac{1+2}{2}$ = 1,5 (c'est la moyenne arithmétique des nombres 1 ; 2).

De même la mention passable est répété 3 fois et est occupé les places 3 ; 4 ; 5, donc le rang de chacun d'eux = $\frac{3+5+4}{3}$ = 4 On résume la solution dans le tableau suivant:

x	y	Rang des x	Rang des y	D	D^2
Faible	Faible	2	1,5	0,5	0,25
Passable	Passable	4	4	zero	zero
Faible	Bien	2	6	– 4	16
Bien	Passable	5	4	1	1
Faible	Faible	2	1,5	0,5	0,25
Excellant	Très bien	7	7	zero	zero
Trèsbien	Passable	6	4	2	4
					21,5

$\because$ $r = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{n(n^2-1)}$ $\therefore$ $r = 1 - \frac{6 \times 21{,}5}{7\,(49-1)}$

$= 1 - \frac{129}{336} \simeq 0,6161$ la corrélation est directe.

Essaye de résoudre

3 Le tableau suivant indique l'étude de la relation entre le niveau des élèves dans les deux métiers statistique et mathématique:

Statistique(x)	Passable	Très bien	Excellant	Très bien	Passable	Passable
Mathématique (y)	Bien	Bien	Très bien	Excellant	Bien	Faible

Calculezle coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les mentions en déterminant sa nature.

Exemple

4 D'après le tableau suivant, calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y:

x	4	7	8	5	8	12
y	7	6	6	4	6	10

Solution

On forme le tableau suivant:

x	y	Rang des x	Rang des y	D	D^2
4	7	6	2	4	16
7	6	4	4	0	0
8	6	2.5	4	–1.5	2.25
5	4	5	6	–1	1
8	6	2.5	4	–1.5	2.25
12	10	1	1	0	0
					21,5

$\because \; r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2-1)}$ $\therefore 1 = \frac{6 \times 21,5}{6\,(36-1)}$ $\simeq 0,3857$ La corrélation est directe

Réflexion critique: ΣD^2 est elle différente si on range les variable x et y dans l'ordre croissant ? Explique votre réponse.

Essaye de résoudre

4 D'après le tableau suivant, calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y en déterminant sa nature:

x	10	7	8	7	6	4
y	5	8	7	9	9	10

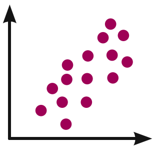
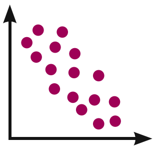
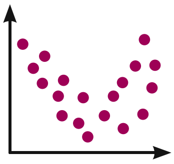
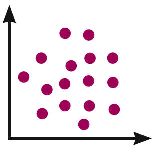
Exercices 1 - 1

Choisit la bonne réponse parmi les proposés:

1) Dans ce qui suit, le coefficient de corrélation le plus fort est:
   a) – 0,94   b) zero   c) 0,5   d) 0,85

2) Dans ce qui suit, le plus fort coefficient de corrélation indirect est:
   a) – 0,2   b) – 0,5   c) – 0,7   d) – 0,8

3) Le nuage de dispersion qui représente une corrélation indirecte est:

a) 
b) 
c) 
d) 

4) Le coefficient de corrélation le plus faible est:
   a) - 1,2   b) - 0,7   c) 0,12   d) 0,9

5) Lequel des nombres suivant représente le plus fort coefficient de corrélation inverse:
   a) 0,3   b) 0,9   c) - 1,1   d) - 0,95

Répondre aux questions suivantes

6) D'après le tableau suivant

x	12	10	14	11	12	9
y	18	17	23	19	20	15

(i): Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y.

(ii): Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables x et y.

7) D'après le tableau suivant

x	7	7	8	3	7	11
y	8	4	12	2	10	11

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y.

8) D'après le tableau suivant

x	1	3	4	6	7	9
y	6	4	4	3	2	1

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables x et y en déterminant sa nature.

9) D'après le tableau suivant

x	6	5	7	8	10	6	7
y	4	7	5	6	8	7	8

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables x et y en déterminant sa nature.

10 D'après le tableau suivant

x	3	1	6	4	3	8
y	7	4	5	8	6	7

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y en déterminant sa nature.

11 D'après le tableau suivant

x	Très bien	Très bien	Bien	Faible	Passable	Très bien
y	Bien	Passable	Bien	Excellant	Très bien	Passable

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y.

12 Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre les deux variables x et y en déterminant sa nature si:

$\Sigma\, x = 220$ $\Sigma\, y = 140$ $\Sigma\, x\, y = 2658$

$\Sigma\, x^2 = 5486$ $\Sigma\, y^2 = 2292$ $n = 10$

13 En lien avec la commerce: Le tableau suivant indique un ensemble de 6 livres selon leurs prix (x) et le taux des ventes (y).

Le prix (x)	Moins chère	Très moins chère	Bon marché	Très chère	Chère	Très chère
Vente (y)	Chère	Chère	Très chère	Moins chère	Bon marché	Moins chère

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre le prix du livre et son taux de vente.

14 En lien avec la propagande: un entreprise fait une étude sur ses dépenses sur la propagande x (en mille L.E) et son taux de vente y (mil unité). Le tableau suivant indique les datas de huit branches de cet entreprise:

x	19	18	7	10	4	13	15	5
y	12	10	7	9	6	13	14	12

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre la dépense sur la publicités et son taux de vente en déterminant sa nature.

15 En lien avec l'enseignement Le tableau suivant indique les notes de dix élève dans deux matières chimie et biologie.

Chimie	60	85	55	90	65	50	80	70	95	75
Biologie	55	75	50	95	60	65	85	80	90	70

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les deux variables en déterminant sa nature.

16 En lien avec les naissains: Dans une étude sur la relation entre l'âge de la mère et le nombre de ses enfants:

L'âge de mère	18	20	23	27	29	32	33	35
Nombre d'enfants	2	1	1	2	3	4	3	5

Calculele coefficient de corrélation des rangs de Spearman en déterminant sa nature.

unité 1
1 - 2

Régression

Régression

A apprendre		Vocabulaire de base	
Définition de régression Type de régression Equation de la droite de régression	Méthode des moindres carrés Activités sur Equation de la droite de régression	Régression Droite de régression	Moindres carrés

Préliminaire:

Tu as déjà étudié la fonction et sa représentation graphique.

Dans la leçon précédente vous le savez le nuage de dispersion et l'objectif de sa représentation est de déterminer la nature de la relation entre les deux variables x et y ainsi que les propriétés de la corrélation peuvent être:

Relation linéaire Relation linéaire indirecte

Relation non linéaire Pas de relation

Dans cette leçon, on va étudier comment déterminer l'équation de la droite de régression et l'objectif de cette etude est d'aider le chercheur de connaitre la nature des datas et estimer des bons résultats.

Rappel

Une fonction est une relation entre deux ensemnles X et Y tel que de tout élément de X associe un et un seul élément de Y Une fonction est parfaitement déterminée Par son ensemble de définition, son ensemble image et sa regle

Définition La régression est une méthode statistique d'estimer la valeur de l'une des deux variables en connaissant la valeur de l'autre.

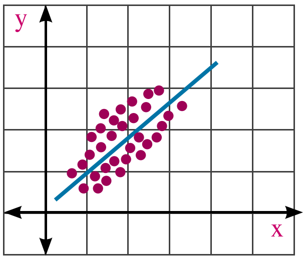
Différents types de régression:

a **Régression linéaire**: Simple la variable dépendante (y) dépende d'une seule variable (x) à parie d'une relation linéaire.

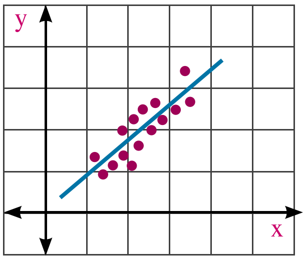
b **Multiple régression**: la variable dépendante (y) dépende de plusieurs variables (x).

c **Régression non linéaire**: Si la relation entre la variable dépendante (y) et les variables indépendante n'est pas linéaire (du deuxième degrée, troisième degrée, exponentielle , logarithmique ,………) Dans cette leçon, on va étudier simple régression linéaire et les figures suivantes montrent la relation entre le coefficient de corrélation et le nuage des points sur la droite de régression. Quand ces points se rapprochent de cette droite, la valeur de (r) augmente ou diminue jusque ces points superposent à cette droite, dans ce cas la valeur de (r) est (1) ou (-1).

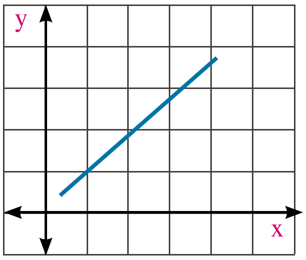
Matériels utilisés: Calculatrice scientifique Programme SPSS Programme Microsoft Excel



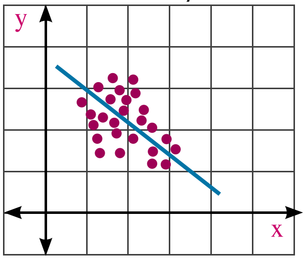
(1) Corrélation directe moyenne



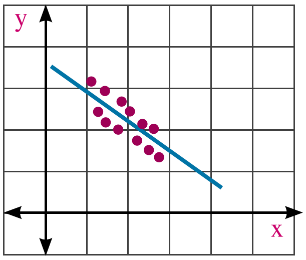
(2) Corrélation directe forte



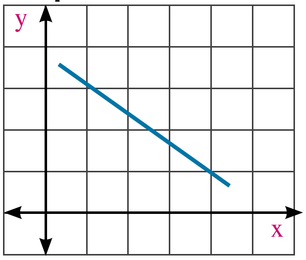
(3) Corrélation parfaite directe



(4) Corrélation indirecte moyenne



(5) Corrélation indirecte forte



(6) Corrélation parfaite indirecte

Equation de la droite de régression:

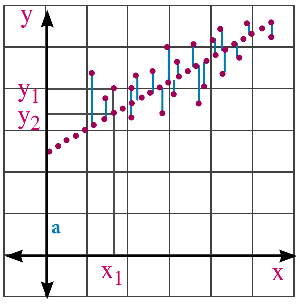
Tu as déjà étudié dans la géométrie analytique l'équation d'une droite de pente m qui coupe sur l'axe des ordonnées une partie c est : y = mx + c.

Dans les figures (2) et (5), le nuage des points montre que la relation entre les deux variables est linéaire car On peut imaginer qu'il ya une droite où les points sont très proches d'elle, mais dans les figures (1) et (4), on doute que la relation entre les deux variables soit linéaire. Donc on utilise les couples (x_r ; y_r) pour trouver une droite qui convient l'ensemble des points dont l'équation est:

$$y = a + bx$$

La méthode la plus célèbre pour trouver les meilleures valeurs de a et b est appelée méthode des moindre carrés.

Méthodes des moindres carrés:



Dans ce qui précède, on a appris que dans une corrélation, il n'est pas obligatoire que tous les points soient situés sur la droite de régression. Pour obtenir la meilleur droite de régression, il faut diminuer les déviations à la plus petite valeur possible, et par la substitution dans l'équation de la droite de régression du couple (x ; $\hat{y}$) situé sur la droite de régression et le couple (x ; y) un point réel des datas originaux, alors la droite de régression est convenable quand $|\hat{y} - y|$ est plus petit possible pour tout les valeurs de x ou quand $\Sigma(\hat{y} - y)^2$ est plus petit possible, soit l'équation de la droite de régression $\hat{y} = a + bx$

La diffeerence absolue = $|(a + bx) - y)|$.

On doit déterminer les valeurs de a et b pour que la différencé absolue soit plus petite possible en résoluvant le système des deux équations :

$\Sigma y = n a + b \Sigma x$ **(1)** $\Sigma x y = a \Sigma x + b \Sigma x^2$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** Donc on peut écrire l'équation de la droite de régression sous la forme.

$b = \dfrac{n \Sigma x y - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$ (b est appelé le coefficient de régression de y en x, il exprime la pente de la droite de régression suivant la direction positive de l'axe des abscisses).

L'équation de la droite de régression y en x est utilisées pour:

1- Estimer la valeur de y en connaissant la valeur de x.

2- Déterminer la valeur de l'erreur qui est déterminée de la relation:

Valeur de l'erreur = |valeur du tableau – valeur qui vérifie l'équation de la droite de régression|

Remarque: en utilisant l'équation de la droite de régression, il est préférable de ne pas dépasser trop l'ensemble image de la variable x utilisée dans l'équation de régression.

Réflexion critique: la valeur du coefficient de régression indique la corrélation. Explique cette phrase.

Exemple

1 Le tableau suivant indique la production des cultures agricoles (y) et la superficie cultivées (x) en feddans.

La superficie cultivées (x) en feddans	50	200	110	80	120	74.5	88.9	5.7	11	3.2
Production (y) en kg	140	500	400	300	356	240.5	200.6	33.5	69.8	18.7

(a): Trouve l'équation de régression.

(b): Estimez la valeur de la production en kg si la superficie cultivées est 100 feddansù.

(c): Trouve la valeur de l'erreur de la production si superficie cultivées est 120 feddans.

Solution

En utilisant la calculatrice:

1- Insérer les informations:

On suit les mêmes étapes utilisées dans l'exemple (1) dans la leçon précédent (corrélation) pour insérer les informations.

2-Rechercher les résultats:

On appuie sur les touches suivantes:

On appuie sur les touches suivantes pour trouver les résultats d'opérations suivante: SHIFT 1

(STAT) De la liste : sum :3 et on appuie sur la touche [3]
Une nouvelle liste de 1 à 8 (somme des) résultates et on choisit:

2259,1 = ΣY : 4 743,3 = ΣX : 2

254489,18 = ΣXY: 5 89017,19 = ΣX^2: 1

Premièrement: on calcule la valeur de la constante b de la relation:

$$b = \frac{n\,\Sigma x\,y - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{10 \times 254489{,}18 - 743{,}3 \times 2259{,}1}{10 \times 89017{,}19 - (743{,}3)^2} \simeq 2{,}5637$$

on calcule la valeur de la constante a de la relation: $a = \overline{y} - b\,\overline{x}$

Où : $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, $\overline{y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$

$\therefore\ \overline{x} = \dfrac{743{,}3}{10} = 74{,}33$, $\overline{y} = \dfrac{2259{,}1}{10} = 225{,}91$

$\therefore\ a = 225{,}91 - 2.5637 \times 74{,}33 \simeq 35{,}35$

Remarque:

On peut calculer la constante a directement comme ce qui suit:

$\because\ a = \dfrac{\Sigma y - b\,\Sigma x}{n}$ $\therefore\ a = \dfrac{2259{,}1 - (2{,}5637 \times 743{,}3)}{10} \simeq 35{,}35$

$\therefore$ L'équation de la droite de régression est: $\hat{y} = 2{,}564\,x + 35{,}35$

Deuxièmement: De l'équation de la droite de régression: $\hat{y} = a + b\,x$

$\because\ \hat{y} = 2{,}564\,x + 35{,}35$, $x = 100$

$\therefore\ \hat{y} = 2{,}564 \times 100 + 35{,}35 = 291{,}72$ Kg

On peut vérifier que la réponse est juste en utilisant la calculatrice comme ce qui suit:
100 [SHIFT] [1] (STAT) [5] (Reg) [5] : $\hat{y}$ [=]

Troisièmes: Pour trouver la valeur de l'erreur de la production si x = 120 feddans:

$\because\ \hat{y} = 2{,}564\,x + 35.35$

$\therefore\ \hat{y} = 2{,}564 \times 120 + 35{,}35 \simeq 343$

$\because$ Erreur = |valeur du tableau - valeur calculer de la droite de régression|

$\therefore$ Erreur = |356 – 343|= 13

Activité

(a): Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le programme (Microsoft Excel)

(b): Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le programme (spss).

(a): Utilisation du programme (Microsoft Excel)

Premièrement : Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le logiciel (Microsoft Excel)

Deuxièmement : Vérifiez la réponse de l'exemple précédent en utilisant le logiciel (SPSS)

1- Accédez le logiciel (Microsoft Excel) puis insérez les données précédant dans les cellules A et B sous le nom x et y comme deux variables ou le nom réel de ces données comme montre la figure (1).

2- Du menu, on appuie sur la touche Chart Wizard, on obtiendra Chart Type puis de la liste XY Squatter, on appuie sur la touche Finish comme montre la figure (1).

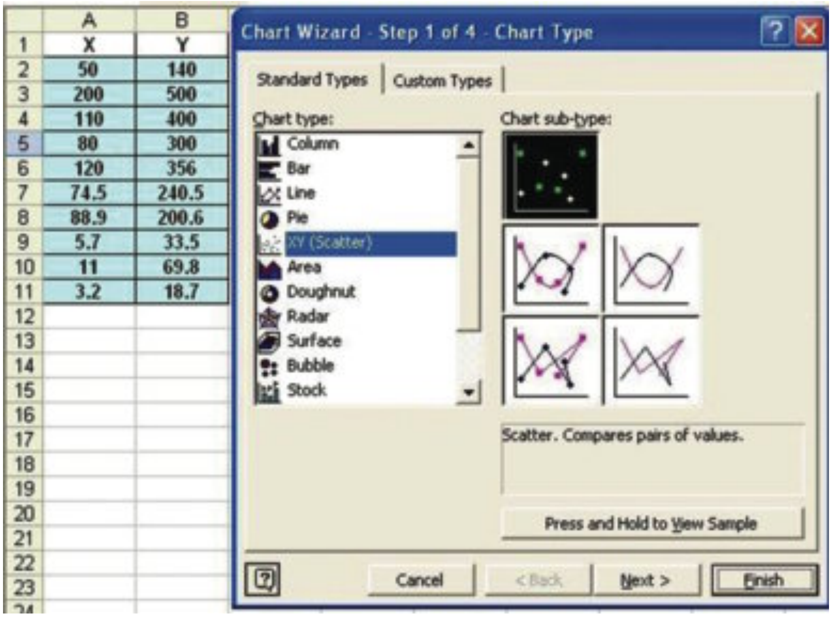


figure (2)

3- La figure (3) montre la représentation graphique des points se trouvant dans le tableau qui est appelé le nuage de dispersion. On choisit figure hachurée par le noir.

4- Les valeurs sur l'axe horizontal représentent les valeurs de x et Les valeurs sur l'axe vertical représentent les valeurs de y. On est sur le point de trouver l'équation de la droite de régression de y sur x qui est sous la forme:

$Y = a + bX$.

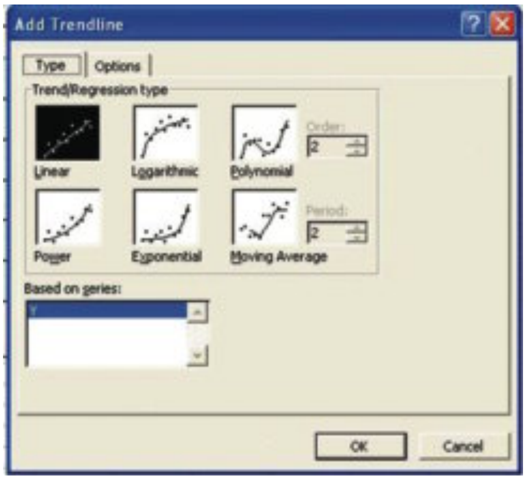


figure 3

5- En appuyant sur le click droit de la souris sur l'un des points (dans la figure 4), on sélectionne « Add Trendline) de la liste apparue. En cliquant dessus, on obtient la figure suivante qui contient 6 formes de dispersion. On choisila première tel que indiqué par la partie assombrie en tant que choix accepté vu qu'on cherche une droite, ensuite on précise ce qui est demandé via l'option « option » en cliquant dessus, on obtient la fenêtre suivante:

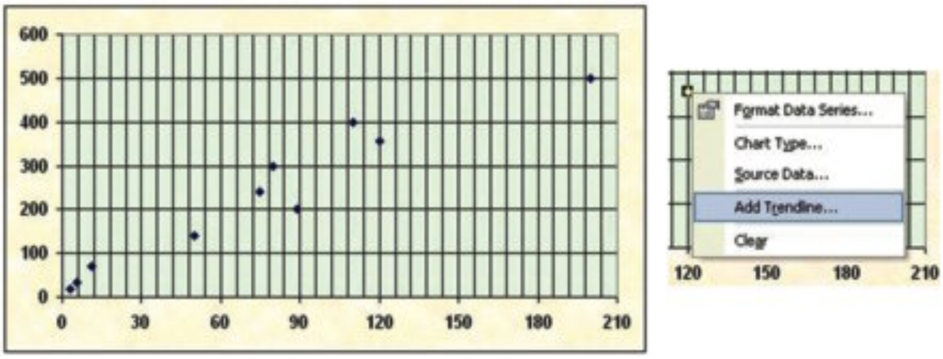


figure (4)

6 - On coche (Display equation on chart) tel qu'indiqué dans la figure 5

7 - On appuie sur « Ok » pour obtenir ce qui est demandé:

a La figure montrant la droite de régression qui contient les points représentant les couples des données.

b On a transmis l'équation de la droite de régression (dans la figure 6) vers le haut avec le changement du style de l'écriture pour larendre plus claire.

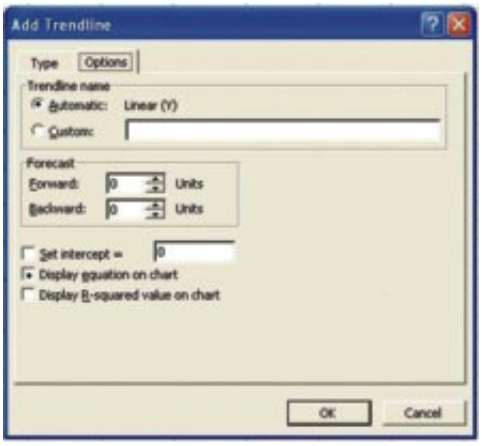


figure (5)

La figure ci-dessous est le résultat de l'opération qui montre la conclusion surtout l'équation suivante:

$Y = 35{,}35 + 2{,}5637x$

C'est l'équation de la droite de régression et c'est la même équation obtenue dans la solution précédente.

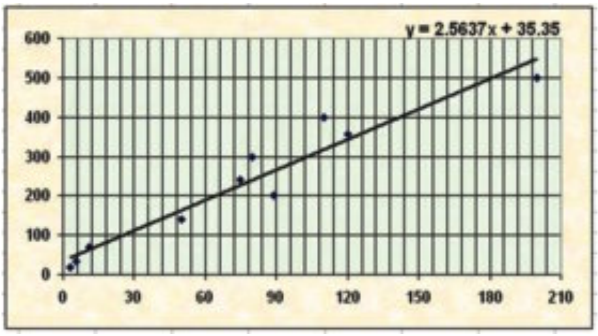
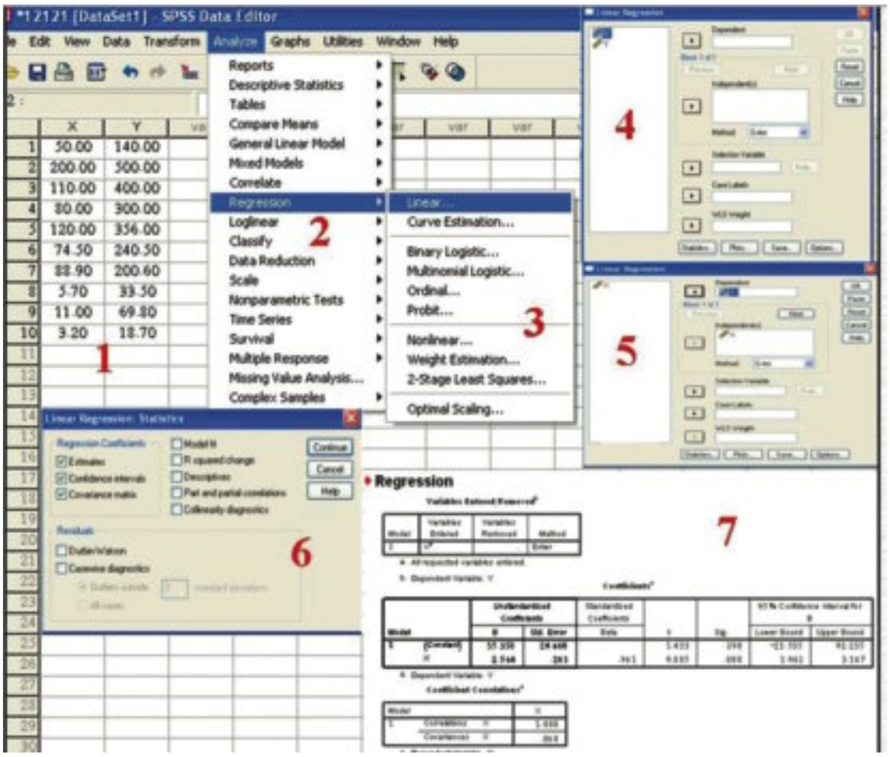


figure (6)

Utilise le programme SPSS



(figure 7)

Exemple

② Lien à l'exploitions minière: Le tableau suivant indique le prix moyen d'un baril du pétrole et évolution économique d'un des payes durant huit ans

Prixd'un baril du pétrole (x)	36	40	36,2	31,1	29,7	16,3	18,7	14,6
Évolution économique(y)	0,91	3,5	3,2	2,7	2,3	– 1	– 0,9	– 1,6

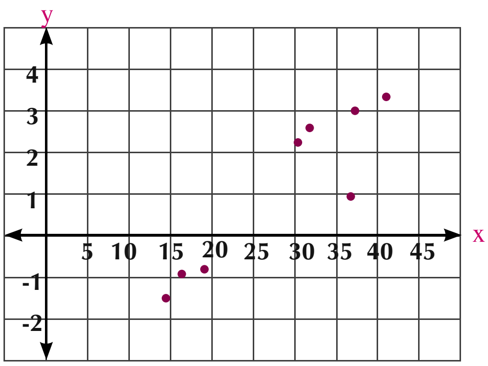
(i): Trace le nuage des points, à l'aide de lui, détermine la nature de la corrélation.

(ii): Trouve l'équation de la droite de régression.

(iii): Estime l'évolution économique quand le prix du baril du pétrole est 15 dollars puis quand son prix est 35 dollars.

Solution

(i): La figure ci-contre représente le nuage des points qui montre que la corrélation est directe.



x	y	x^2	y^2	x y
36	0.91	1296	0.8281	32.76
40	3.5	1600	12.25	140
36.2	3.2	1310.44	10.24	115.84
31.1	2.7	967.21	7.29	83.97
29.7	2.3	882.09	5.29	68.31
16.3	– 1	265.69	1	– 16.3
18.7	– 0.9	349.69	0.81	– 16.83
14.6	– 1.6	213.16	2.56	– 23.36
222.6	9.11	6884,28	40,2681	384,39

Du tableau:

$\Sigma y = 9{,}11$ $\qquad \Sigma x = 222{,}6$

$\Sigma\, x\, y = 384{,}39$ $\qquad \Sigma x^2 = 6884{,}28$

(ii): On calcule la valeur de la constante b de la relation:

$$b = \frac{n\,\Sigma x\,y - \Sigma\, x\, \Sigma\, y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{8 \times 384{,}39 - (222{,}6 \times 9{,}11)}{8 \times^2 (222{,}6) - 6884{,}28} \simeq 0{,}1896$$

$\because\ a = \dfrac{\Sigma y - b\Sigma\, x}{n}$ $\qquad \therefore\ a = \dfrac{9{,}11 - (0{,}1896 \times 222{,}6)}{8} \simeq -4.1368$

$\because$ Équation de la droite de régression est: $\hat{y} = a + b\,x$

$\hat{y} = 0{,}1896\, x - 4{,}1368$

(iii):

Quand $x = 15$ alors : $\hat{y} = 0.1896 \times 15 - 4.1368 \simeq -1.2928$

Quand $x = 35$ alors : $\hat{y} = 0.1896 \times 35 - 4.1368 \simeq 2.4992$

Essaye de résoudre

1. Dans une étude de la relation entre le revenu (x) et la consommation (y) en L.E, on a obtenu les résultats suivants:

$\Sigma x = 120$, $\Sigma y = 100$, $\Sigma xy = 516$

$\Sigma x^2 = 720$, $\Sigma y^2 = 410$, $n = 40$

a. Trouve le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y puis déterminer sa nature.

b. Équation de la droite de régression.

c. Estime la valeur de la consommation (y) quand le revenu arrive à 10000 L.E

Exercices 1 - 2

Premièrement: Choisit la bonne réponse parmi les proposées:

1. L'équation de la droite de régression où b est le coefficient de régression est:

(a) $\hat{y} = a\,x + b$ (b) $\hat{y} = a + b\,x$

(c) $\hat{y} = a\,y + b$ (d) $\hat{y} = a + b\,y$

2. Si l'équation de la droite de régression est: $\hat{y} = 2 + 0{,}5\,x$ alors la valeur prévue de y quand x = 6 est:

(a) 4 (b) 5 (c) 7 (d) 8

3. Si les deux points (11,5 ; 10) et (6,5 ; 5) appartiennent à la droite de régression de y en x, alors la corrélation entrex et y est:

(a) directe (b) inverse (c) parfaite (d) nulle

4. Si les deux points (5 ; 13) et (14 ; 4) appartiennent à la droite de régression de y en x, alors les points suivants appartiennent à cette droite sauf le point:

(a) (15 ; 5) (b) (10 ; 8) (c) (6 ; 12) (d) (5 ; 13)

5. Si tous les points du nuage des points appartiennent à une droite de pente négative, alors le coefficient de corrélation entre x et y est égaleà:

(a) 1 (b) zero (c) - 0,5 (d) -1

6. Si tous les points du nuage des points appartiennent à une droite de pente positive, alors le coefficient de corrélation entre x et y est égale à:

(a) - 1 (b) zero (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

Deuxièmement : Réponds aux questions suivantes:

7. Le tableau suivant indique la relation entre deux variables x et y:

x	5	8	10	14	16	20
y	4	6	9	11	12	15

(a) Trace le nuage des dispersion (b) Trouve l'équation de la droite de régression

(c) Estime la valeur de y quand x = 12

8. Du tableau suivant:

x	20	33	30	40	13	15	26	25
y	7	8	9	11	4	5	8	9

(a) Estime la valeur de y quand x = 35

(b) Trouve la valeur de l'erreur de y si x = 30

9 Dans une étude pour trouver la relation entre les deux variable x et y, on a obtenu les résultats suivants:

$n = 10$, $\overline{x} = 8$, $\overline{y} = 10$, $\Sigma x y = 870$, $\Sigma x^2 = 665$, $\Sigma y^2 = 1400$:

a Trouve la coefficient de corrélation

b L'équation de la droite de régression

10 Si : $\Sigma x = 30$, $\Sigma y = 40$,$\Sigma x y = 162$

$\Sigma x^2 = 210$, $\Sigma y^2 = 304$, $n = 6$:

a Trouve l'équation de la droite de régression

b Trouve la coefficient de corrélation entre x et y puis détermine sa nature

11 Lien de vente: Dans un agence de vente des voitures utilisées, les ventes sont:

Age de voiture (x)	3	2	1	1	5	6	1	4
Son prix (y)	54	80	74	98	45	40	85	60

a Trouve le coefficient de corrélation de Pearson

b Trouve l'équation de la droite de régression

12 Lien d'économie: Le tableau suivant représente le revenu mensuel(x) et la dépense (y) d'un ensemble des familles en centaines des L.E:

Revenu (x)	38	27	39	40	56	66	42	44
Dépense (y)	19	25	20	28	31	38	27	22

a Trouve la coefficient de corrélation entre x et y puis détermine sa nature.

b Trouve l'équation de la droite de régression

c Estime la valeur de la dépense (y) si le revenu (x) est 5000 L.E

d Trouve la valeur de l'erreur de (y) si $x = 40$

13 Lien à la famille Dans une étude d'un échantillon de 40 familles entre le revenu (y) et la consommation (x) en centaines des L.E.dans un ville, on a obtenu les résultats suivants:

$\Sigma x = 100$, $\Sigma y = 120$, $\Sigma x y = 516$, $\Sigma x^2 = 410$, $\Sigma y^2 = 720$.

a Trouve l'équation de la droite de régression

b Estime le revenu de la famille dont sa consommation est 700 L.E. par mois.

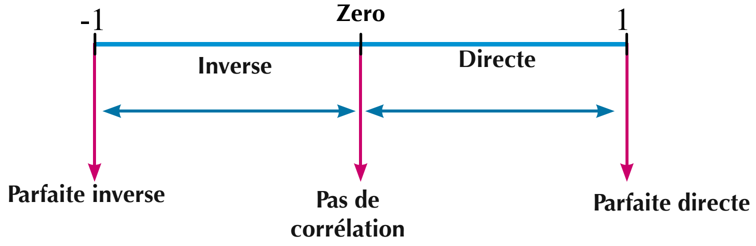
Résumé de l'unité

1 La corrélation linéaire est une méthode statistique pour déterminer le degré entre deux variables.

2 Nuage de dispersion est la représentation graphique de quelques couples (x ; y) pour décrire la relation entre deux Variables.

3 La corrélation linéaire est la valeur numérique de la relation entre deux variables seulement

4 Le coefficient de corrélation est noté (r). Elle est une quantité scalaire qui mesure le degré de la corrélation Entre deux variables où $-1 \leqslant r \leqslant 1$ Nous disons que la corrélation est parfaite directe si le coefficient de corrélation r = 1, elle est parfaite indirecte si le coefficient de corrélation r = -1et nulle si le coefficient de corrélation r = 0.



5 Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \times \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

6 Le coefficient de corrélation des rangs de Spearman:

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

7 Régression est une méthode statistique pour estimer la valeur de l'une des deux variables en connaissant la valeur. de l'autre

8 Equation de la droite de régression: $\hat{y} = a + b\,x$

où:

a Est la partie découpée de l'axe des ordonnées

b Est le coefficient de régression de y en x, il exprime la pente de la droite de régression la direction positive de l'axe des abscisses.

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\ ,\ a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

9 L'équation de la droite de régression est utilisée pour:

Prévoir la valeur de y en connaissant la valeur de x

Déterminer la valeur de l'erreur de la relation:

Valeur de l'erreur = |valeur donnée – valeur qui vérifie l'équation de la droite de régression|

Exercices généreux

Premièrement : Choisit la bonne réponse parmi les proposés:

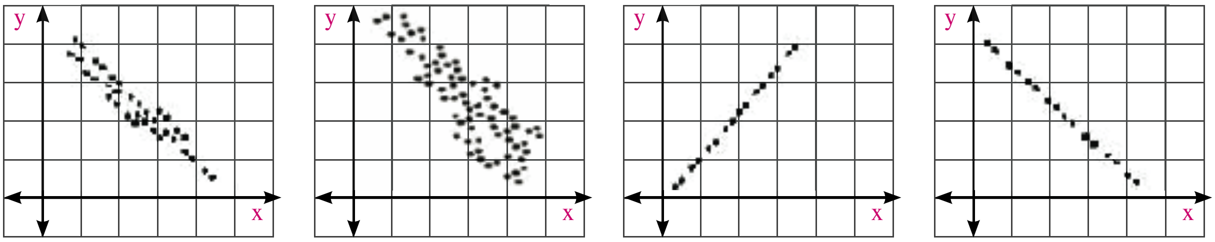
1 Dans ce qui suit, le coefficient de corrélation indirecte est:

a $-0,9$ b $-0,5$ b $-0,1$ d zero

2 Dans ce qui suit, le plus petit coefficient de corrélationle est:

a $-1,1$ b $-0,9$ b $0,12$ d $1,02$

3 Le nuage de dispersion qui représente une corrélation indirecte forte entre x et y est:



a b c d

4 Si l'équation de la droite de régression est: $y = 3 - x$ alors la nature de la corrélation entre les deux variables x et y est:

a Parfaite directe b Pas de corrélation c nulle d Parfaite inverse

5 Si l'équation de la droite de régression est: $y = 7 - 0,8\,x$ alors la valeur prévue de y quand $x = 5$ est:

a 2 b 3 c 5 d 7

6 Si les deux points (2 ; 8) et (7 ; 3) appartiennent à la droite de régression de y en x et la corrélation est parfaite , alors le coefficient linéaire est:

a -1 b 0 c $\frac{1}{2}$ d 1

Deuxièmement: Réponds aux questions suivantes:

7 Si

$\Sigma x = 50$ $\Sigma y = 40$ $n = 10$

$\Sigma xy = 213$ $\Sigma x^2 = 298$ $\Sigma y^2 = 176$

Trouve la valeur du coefficient de corrélation de Person entre x et y en déterminant sa nature et son degré.

8 Du tableau suivant:

x	4	5	6	7	8	9	10
y	12	7	12	3	14	15	21

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Person entre x et y en déterminant sa nature.

9 Du tableau suivant:

x	32	42	40	35	31	46	50	33
y	25	34	35	30	17	28	42	19

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y en déterminant sa nature.

10 Du tableau suivant:

x	excellant	bien	très bien	passable	faible	bien
y	bien	faible	passable	excellant	très bien	passable

Calcule le coefficient de corrélation des rangs de Spearman.

11 En lien avec la commerce: letableau suivant représente le taux de vente x et le bénéfice y d'un ensemble formé de 6 compagnies(entreprises).

Taux de ventes x	500	600	400	480	550	100
Bénéfice y	300	400	250	200	400	90

Calcule le coefficient de corrélation de Pearson entre le taux de vente et le bénéfice

12 Du tableau suivant:

x	10	12	15	12	14	8
y	6	8	6	6	9	5

a Calcule le coefficient de corrélation linéaire de Person entre les deux variables x et y en déterminant sa nature.

b Trouve l'équation de la droite de régression puis estime la valeur de y quand x =7.

13 En lien avec la commerce:

Dans une étude entre la quantité (y) d'une marchandise et son prix (x) en L.E. On a obtenu les résultats suivants:

$\Sigma x = 49$, $\Sigma y = 77$, $\Sigma xy = 609$, $\Sigma x^2 = 371$, $\Sigma y^2 = 1049$, $n = 7$:

a Calculez le coefficient de corrélation linéaire de Person entre la quantité demandée et le prix:

b Estimez la quantité (y) quand le prix est 21 L.E.

14 Elien avec le sport: Le tableau suivant indique l'âge d'une personne et le nombre d'heurs qu'elle s'exerce.

Age	20	25	33	37	50	58
Nombre d'heurs	10	6	3	2	1,5	1

a Trouve l'équation de régression

b Estime le nombre d'heurs d'exercice quand l'âge de la personne est 40 ans.

c Calcule la valeur de l'erreur quand l'âge de la personne est 33 ans.

Pour plus d'activité et des exercices www.sec3mathematics.com.eg

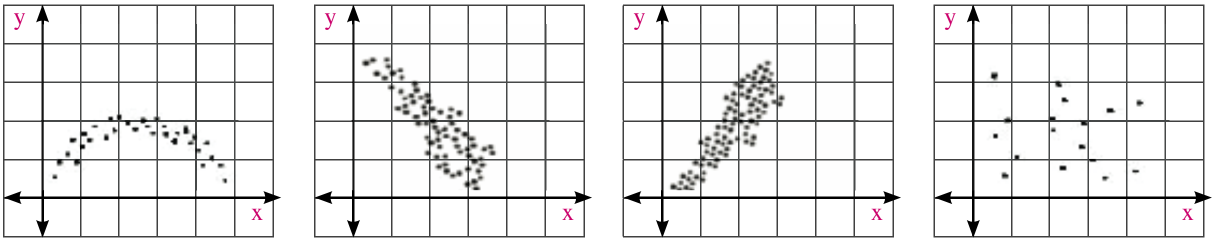
Epreuve cumulative

Questions à courtes réponses : Choisit la bonne réponse parmi les proposées (de 1 à 6):

1. La somme des 7 nombres dont la moyenne arithmétique est 8 est:

   a 40 b 56 c 60 d 80

2. Le nuage représentant une relation positive entre x et y est:



a b c d

3. La relation entre l'aire d'un carré et la longueur de son côté est:

   a positive (directe) forte b négative (inverse) forte
   c positive (directe)parfaite d négative (inverse) parfaite

4. Si deux variables augmentent ensemble ou diminuent ensemble, alors la corrélation entre elle est

   a (directe). b (inverse).
   c non linéaire. d nulle.

5. Le coefficient de corrélation est comprise entre

   a [0 , 1] b]- 1 , 1[c [- 1 , 1] d [- 1 , 1] – {0})

6. Dans l'équation de la droite de régression, la variable demandée est appelé la variable.

   a dépendante b indépendante c directe d inverse

Deuxièmement:

7. Le signe du coefficient de régression indique la nature de la corrélation (directe ou inverse) Explique cette phrase.

Questions à longues réponses:

x	65	66	67	67	68	69
y	70	72	68	64	68	67

8. Du tableau suivant.

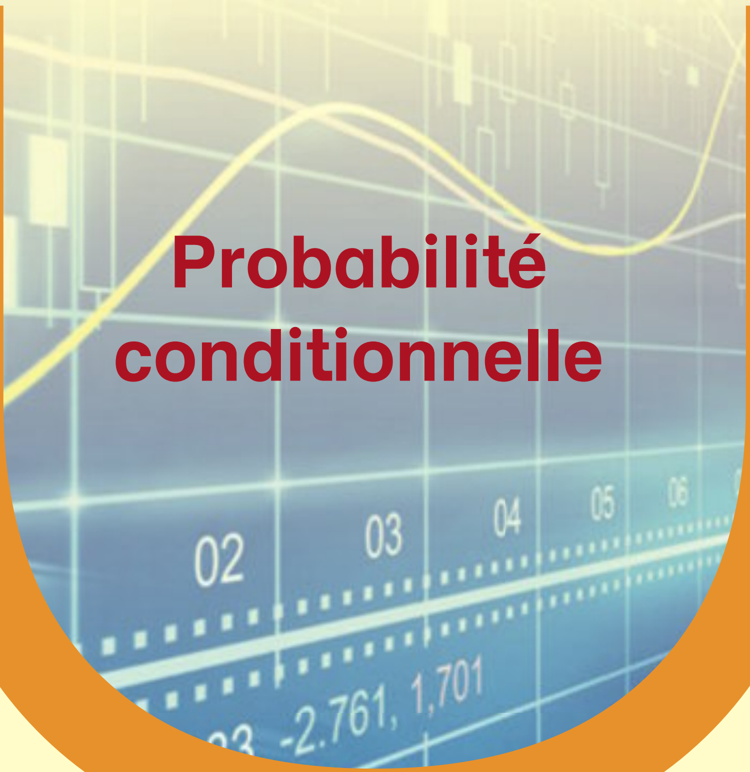
   a Trouver le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables x et yen déterminant sa nature
   b Estime la valeur de y quand x = 62
   c calcule la valeur de l'erreur de y si x = 66

9. Le tableau suivant indique la relation entre l'âge du chauffeur et le nombre de violation obtenue durant un an.

Age du chauffeur(x)	45	28	52	24	56	32	63	38
Nombrede violation (y)	4	7	2	7	2	5	1	3

   a Trouve le coefficient de corrélation des rangs entre x et y
   b Trouve l'équation de la droite de régression de y en x
   c Estime la valeur de y si x = 40 d calcule la d'erreur de y quand x = 38

Unité 2



Probabilité conditionnelle

Introduction de l'unité

On a étudie auparavant que la statistique est l'une des branches de mathématiques qui s'intéresse à cumuler les datas, leurs classification et leurs interprétation, afin de prendre des décisions convenables d'un phénomène quelconque. La probabilité est considère comme la base des méthodes statistiques. Les chercheurs les ont utilise depuis longtemps pour des raison de sante, sociales et économique, …… La science de la probabilité a été fondée par plusieurs savants : le savant français (Pierre-Simon Laplace 1749-1827) , et le savant anglais (de Morgan 1806-1781) et (John Venn 1834-1923) et le savant russe (Andrey Markov 1856- 1922) et d'autres ………………..

Pierre Simon Laplace

De Morgan

John Vin

Andrei Markov

Notez bien que les applications de la statistique et de la probabilité sont nombreuses dans les divers domaines pédagogique, sociale et économique. Dans cette unité, on va étudier la probabilité conditionnelle entre deux variables, ses théorèmes et ses Applications dans des situations différentes de la vie ainsi que l'étude des événements dépendants et indépendants.

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Reconnaitre les événements et les événements incompatibles
- Reconnaitre la probabilité conditionnelle
- Déduire les théorèmes de la probabilité conditionnel
- Reconnaitre les événements dépendants et indépendants
- Appliquer la probabilité conditionnelle dans des situations quotidiennes différentes

Vocabulaires de base

- *Evénements incompatibles*
- *Evénements compatibles*
- *Evénements dépendants*
- *Evénements indépendants*
- *Probabilité conditionnelle*

Leçons de l'unité

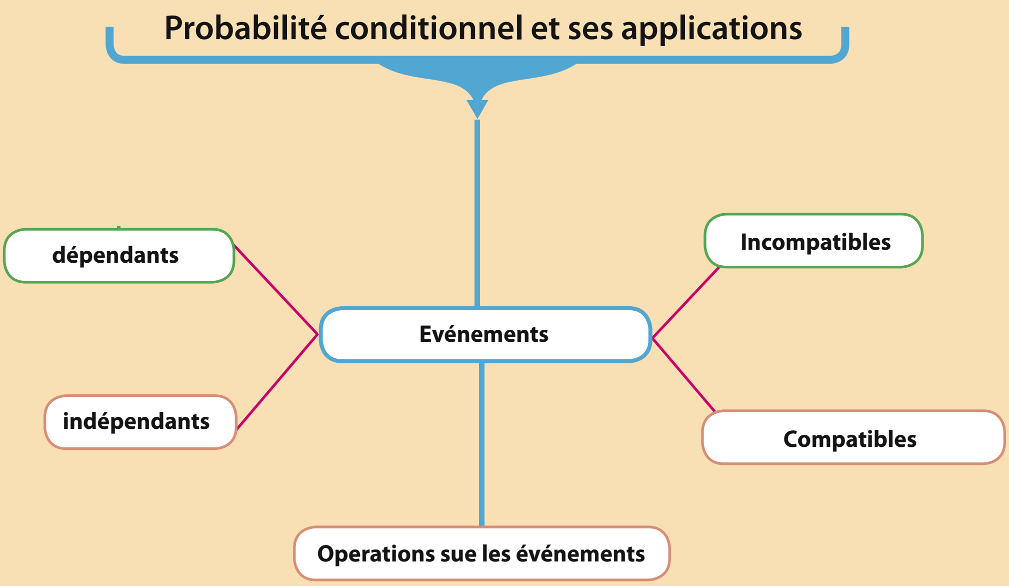
Lesson (2-1): probabilité conditionnel

Lesson (2-1): événements dépendants

Matériels utilisés

Calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



unité 2

2 - 1 Probabilité conditionnelle

A apprendre

- Evénements incompatibles
- Evénements compatibles
- Probabilité conditionnelle

Vocabulaires de base

- Evénements incompatibles
- Evénements compatibles
- Probabilité conditionnel

Introduction :

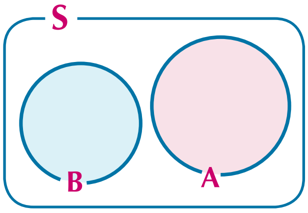
Tu as déjà étudié le calcul de la probabilité d'un événement quelconque (soit A) d'une expérience aléatoire En connaissant la relation entre le cardinal de cet événement (card(A)) et le cardinal de l'univers de l'expérience aléatoire (card (U))

P(A) (la probabilité de la réalisation de l'événement (A) $= \dfrac{\text{card (A)}}{\text{card (U)}}$

Evénements incompatibles

Les événements incompatibles sont les événements qui ne se réalisent pas à la fois car la réalisation de l'un n'implique pas la réalisation de l'autre c.-à-d. il n'a pas d'éléments commun ente eaux.

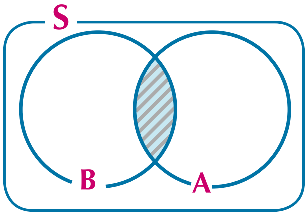
Mutually exclusive events:



n'ont pas d'éléments communs d'où leur intersection est l'ensemble vide ϕ.

$\therefore$ P (A ∩ B) = Zéro et P (A ∪ B) = P (A) + P (B)

Deux événements compatibles



La réalisation de l'un de deux événements compatibles n'implique pas la réalisation de l'autre événement (Il y a des éléments communs entre eaux)

$\therefore$ P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

Dans ce qui suit, détermine les événements incompatibles et les événements compatibles ,

(1) P (A ∪ B) = B (A) + P (B) - P (A ∩ B)

(2) P (A') =1 - P (A)

(3) P (A - B) = P (A) - P (A ∩ B)

(4) P (A ∩ B') = P (A - B) = P (A)- P (A ∩ B)

(5) P (A' ∩ B) = P (B - A) = P (B) - P (A ∩ B)

Aide pédagogique — Calculatrie scientifique - Logiciel de graphisme.

Probabilité conditionnelle

Si A et B sont deux événements de U, dans quelque fois, la réalisation d'un événement B affect la réalisation de l'événement A. On peut calculer la probabilité de la réalisation de l'événement A à condition que l'événement B s'est réalisé. En connaissant la relation entre les résultats des deux événements.

Exemple préliminaire: On jette un dé une fois, alors l'univers U est :

U = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } ; si l'événement A = { 1 ; 2 ; 3} est l'événement « avoir un nombre inferieure à 4 »

$P(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Si l'événement B {2 ; 4 ; 6} est l'événement « avoir un nombre pair » La question qui se pose maintenant : si l'événement B s'est réalisé, alors quelle est la probabilité que l'événement A se réalise ?c.-à-d. quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair inferieur à 4 ?

On remarque que la condition donnée rend l'univers des éventualités à l'ensemble B={ 2 ; 4 ; 6}

Et l'événement « avoir un nombre pair » est $A \cap B = \{2\}$

D'où la probabilité demandée est : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Cet exemple montre que la probabilité de quelques événements diffère selon l'univers des éventualités.

A apprendre

La probabilité conditionnelle

Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités U d'une expérience aléatoire, alors la probabilité de la réalisation de l'événement A à condition que la réalisation de l'événement B ; notée P (A/B) et se lit la probabilité de la réalisation de l'événement A à condition que la réalisation de l'événement B

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{où } P(B) > 0$$

On remarque que : la probabilité conditionnelle a les mêmes propriétés de la probabilité (non conditionnelle).

1- $0 \leqslant P(A \mid B) \leqslant 1$

2- $P(U \mid B) = \frac{P(U \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

3- Si $A_1 \cap A_2 = \phi$ alors , $P[(A_1 \cup A_2) \mid B] = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$

Remarque :

- $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$
- $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$
- $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$ à condition que $P(B) > 0$
- $P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$ à condition que $P(A) > 0$

Exemple La probabilité conditionnelle

1) On jette un dé une seule fois، calcule la probabilité d'avoir 2 sachant que Le nombre apparu soit pair.

Solution

Soit U = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} , A = {2} , B ={ 2 ; 4 ; 6}

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{6}$

$\because P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A \mid B) = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$

la probabilité d'apparition le nombre 2 sachant que le nombre apparu est pair est $\frac{1}{3}$

Remarque

Pour la probabilité conditionnelle, on commence par l'événement qui suit le not « quelle est la probabilité et l'événement qui suit l'un des notes: Si A i sachant que A et à condition que est l'événement conditionnelle

Essayez de résoudre:

1) On jette un dé deux fois de suite, quelle la probabilité que le nombre apparu sur le premier jet ne dépasse pas 4 sachant que la différence absolue entre les deux nombres soit 2 ?

Exemple Effectuer des opérations

2) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités U tel que P(A) = 0,45 ; P (B) = 0,6 ; P (B / A) = 0,8 . Trouve :

a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A \mid B)$ d) $P(B' \mid A)$

Solution

a) $\because P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore 0,8 = \frac{P(A \cap B)}{0,45}$ $\therefore P(A \cap B) = 0,8 \times 0,45 = 0,36$

b) $\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B) = 0,45 + 0,6 - 0,36 = 0,69$

c) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,36}{0,6} = 0,6$

Remarque que : $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

d) $P(B' \mid A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)}$

$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$

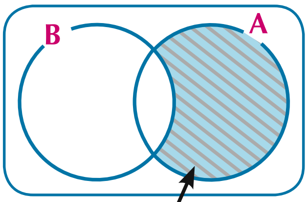
$= \frac{0.45 - 0.36}{0.45} = 0,2$

Rappel

$\mathbf{P(B \cap A) = P(A \cap B)}$

$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$\mathbf{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$



A- B

Essayez de résoudre

2 Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités U tel que P(A) = 0,7 ; P (B) = 0,25 ; P (A - B) = 0,45 . Trouve :

a P(A | B) **b** P(B| A)

c P(A' | B) **d** P(A' | B')

Exemple Harmonic table

3 D'après les données du tableau suivant :

Sexe	nombre de personnes	
	porte des lunettes	ne porte pas des lunettes
Homme	800	600
Femme	400	200

Trouve la probabilité que la personne choisi soit une femme qui porte des lunettes.

Solution

carde (U) = 2000,

soient A l'événement « La personne est une femme »,

B l'événement « personne porte des lunettes »

$$P(A \cap B) = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{1200}{2000} = \frac{3}{5}$$

La conclusion Trouve la probabilité de A sachant que B s'est réalisé c-a-d P(A | B)

$$\because\ P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore\ P(A \mid B) = \frac{1}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$$

La probabilité que la personne choisie soit une femme qui porte des lunettes est $\frac{1}{3}$

Essayez de résoudre

3 Dans l'exemple précédent, trouve:

a la probabilité que la personne choisie soit un homme qui ne porte pas des lunettes.

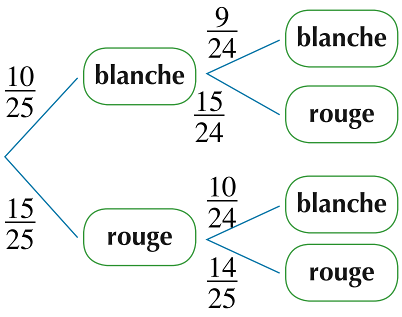
b la probabilité que la personne choisi soit une femme ou un homme qui porte des lunettes.

Exemple — Arbre graphique

(4) Une boite contient 10 boules blanches et 15 boules rouges. On tire au hasard deux boules successivement sans remise. Quelle la probabilité que les deux boules soient blanches ?

Solution

Dans cet exemple, on remarque que le tirage est successif, donc le deuxième tirage est relié au première tirage On peut représenter cet exemple par l'arbre comme montre la figure ci-contre :



Soit l'événement A « la première boule est blanche » et l'événement B « la deuxième boule est blanche »

(B / A) est l'événement « le tirage de la deuxième boule à condition que la première boule est déjà tirée »

(A ∩ B) est l'événement « le tirage de deux boules blanches »

$\because$ P(B | A) $= \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore \dfrac{9}{24} = \dfrac{(A \cap B)}{\frac{10}{25}}$

$\therefore P(A \cap B) = \dfrac{9}{24} \times \dfrac{10}{25} = \dfrac{3}{20}$

La probabilité que les deux boules soient blanches est $\dfrac{3}{20}$

Essayez de résoudre

(4) Dans l'exemple précédent, trouve la probabilité que les deux boules soient rouges.

Exemple — Le lien à l'enseignement

(5) Un instituts comprend 100 étudiants, 60 d'entre eaux étudient l'anglais, 50 étudient le français, 35 étudient les deux langues. On choisit au hasard un étudiant. Trouve la probabilité que l'étudiant choisi étudie:

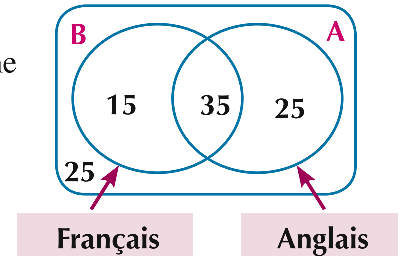
a) l'un des deux langues au moins.

b) l'anglais s'il étudie le français.

c) le français s'il étudie l'anglais.

Solution:

On peut représenter les datas de cet exemple par le diagramme de Venn ci-contre :



On suppose que :

L'événement A « l'étudiant étudie l'anglais »

L'événement B « l'étudiant étudie le français » :

$P(A) = \frac{60}{100} = 0{,}6$, $P(B) = \frac{50}{100} = 0.5$, $P(A \cap B) = \frac{35}{100} = 0{,}35$

a La probabilité que l'étudiant étudie l'un des deux langues au moins est $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}75$

La probabilité que l'étudiant étudie l'un des deux langues au moins est 0,75

b La probabilité que l'étudiant étudie l'anglais s'il étudie le français = $P(A \mid B)$

$\because P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A \mid B) = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$

La probabilité que l'étudiant étudie l'anglais s'il étudie le français est 0,7

c La probabilité que l'étudiant étudie le français s'il étudie l'anglais = $P(B \mid A)$

$\because P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\therefore P(B \mid A) = \frac{0{,}35}{0{,}6} \simeq 0{,}583$

La probabilité que l'étudiant étudie le français s'il étudie l'anglais est 0,583.

Essayez de résoudre

5 Deux joueurs A et B tirent en même temps sur une même cible. Si la probabilité que le joueur A atteigne le cible est = $\frac{2}{5}$, la probabilité que le joueur B atteigne le cible est = $\frac{1}{4}$. et la probabilité que les deux joueurs atteignent le cible est = $\frac{1}{6}$, Trouve la probabilité de chacun des événements suivants :

a la cible est atteinte.

b la cible est atteinte par le joueur A s'il est atteint par le joueur B.

c la cible est atteinte par le joueur B s'il est atteint par le joueur A.

Exercises 2 - 1

Premièrement : Choisit la bonne réponse parmi les proposés :

1) On jette une pièce de monnaie deux fois de suite, la probabilité d'obtenir pile au deuxième jet si face apparait au premier jet est :

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 1

2) On jette un dé une seule fois , la probabilité d'avoir un nombre pair et premier si un nombre supérieur à 1est:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$

3) On jette un dé une seule fois , la probabilité d'avoir 3 sachant que le nombre apparu soit impaire est:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

4) Si $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$; $P(A) = \frac{4}{5}$, alors $P(B \mid A) =$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{8}{25}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{5}$

5) Si $P(A \mid B) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{12}{25}$, alors $P(A \cap B) =$

a) $\frac{4}{25}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{25}{36}$ d) $\frac{16}{25}$

Deuxièmement : Réponds aux questions suivantes:

6) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}7$ et $P(A|B) = 0{,}3$. Trouve :

a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(B \mid A)$ d) $P(A \mid B')$

7) Si $P(A') = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$. Trouve $P(A \mid B')$

8) Si $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$; $P(B \mid A') = \frac{4}{7}$ et $P(A) = \frac{3}{5}$ Trouve

a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$

9) On jette un dé une seule fois , calcule la probabilité d'avoir un nombre premier sachant que le nombre apparu soit impaire.

10) On jette deux dés dista une seule fois. Trouve la probabilité que :

a) Le nombre apparu sur le deuxième dé est 4 sachant que le nombre apparu sur le premièr dé est 2.

b) La somme de deux nombres apparus est pair sachant que le nombre apparu sur le premièr dé est 6.

11) Si la probabilité de la réussite d'un élève dans un examen est 0,7 et la probabilité qu'il parte à l'étranger S'il réussit est 0,6. Quelle est la probabilité qu'il réussit et partie à l'étranger ?

12 Une classe comprend 45 élèves 27 entre eux étudient le français, 15 étudient l'allmend et 9 étudient les deux langues. On choisit un étudiant au hasard. Quelle la probabilité que l'étudiant choisi étudie:

a l'une des deux matières au moins.

b le français s'il étudie l'allmend.

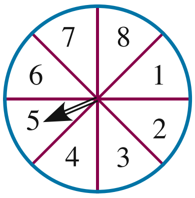
c l'allmend s'il étudie français.

13 On jette deux dés une seule fois. Trouve la probabilité de chacun des événements suivants :

a obtenir le nombre 2 sur les deux faces à la fois sachant que le nombre apparait sur les deux faces.

b obtenir le nombre 5 sur les deux faces sachant que les deux nombres apparus sur les deux faces dépasse 4.

c ne pas obtenir le nombre 3 sur l'une des deux faces sachant que les deux nombres apparus sur les deux faces; soient impaires.



14 La roue tournante : divisée en 8 secteurs identiques numérotées de 1 à 8. Quelle la probabilité que la flèche s'arrête sur le nombre 5 sachant qu'elle s'arrête sur un nombre impaire ?

15 Le tableau suivant indique le nombre d'équipes sportives participants aux différents jeus :

Jeu sportif	hand balle	foot balle	volley balle	basket balle	hockey
Nombre d'équipe	4	10	6	7	3

Si on choisit un jeu au hasard, quelle la probabilité que le jeu choisi soit:

a hockey sachant qu'il n'est pas volley balle?

b basket balle qu'il n'est ni foot balle ni hand balle?

16 Le tableau suivant indique la réponse d'un échantillon constitué de 30 étudiants et 20 étudiantes sur l'économie et la consommation de l'énergie:

Réponse	Oui	Non	n'est sur	Total
Etudiant	20	6	4	30
Etudiante	15	3	2	20

On choisit au hasard une personne de cet échantillon. Quelle la probabilité que la personne choisi soit « étudiante dont la réponse est oui » ?

17 Une boite contient 5 boules blanches et 7 boules noirs. On tire deux boules sans remise. Trouve la probabilité que :

a la deuxième boule soit blanche si la première boule soit blanche.

b la première boule soit blanche et la deuxième boule soit blanche.

c la deuxième boule soit noir et la première boule soit blanche.

18 Parmi trois classes scolaires, Karim et Ziad se sont présentées pour les élections de la présidence de l'union des étudiants de l'école. Le tableau suivant montre le nombre de votes obtenu par chacun d'eux:

	1ere sec	2ème sec	3ème sec	Total
Karim	196	174	130	500
Ziad	240	165	135	540

Si on choisit au hasard un étudiants de cette école , trouve la probabilité que cet étudiant :

a ait vote pour Karim sachant qu'il est de la 3ème secondaire.

b ait vote pour Ziad sachant qu'il est de la 2ème secondaire.

19 100 personnes se sont présentées pour un poste. Le tableau suivant montre la répartition de ces Personnes suivant le sexe et le diplôme:

Diplômé		
	Marié	**célibataire**
homme	40	10
femme	10	10

non diplômé		
	Marié	**célibataire**
homme	3	12
femme	10	5

a Calcule la probabilité que la personne choisi soit marié à condition qu'elle soit diplômé.

b Calcule la probabilité que la personne choisi soit marié et diplômé.

c Calcule la probabilité que la personne choisi soit marié à condition qu'elle ne soit pas diplômé.

20 Dans un examen, 30 % d'élèves ont échoué en chimie, 20% en physique et 15% en chimie et en physique. On choisit au hasard.

a Si l'élève échoue en chimie, quelle la probabilité de son échec en physique ?

b Si l'élève échoue en physique, quelle la probabilité de son échec en chimie?

c Calcule la probabilité de son échec en chimie à condition qu'elle réussit en physique.

d Calcule la probabilité de sa réussite en physique à condition qu'elle réussit en chimie.

21 Activité : utilisation du diagramme de Venn:

A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}2$

a Représente les ensembles précédents par un diagramme de Venn en écrivant ses probabilités sur le diagramme.

b Trouve la probabilité de chacun des événements suivants :

la réalisation de l'événement A à condition que la non réalisation de l'événement B.

la réalisation de l'événement B à condition que la non réalisation de l'événement A.

Les événements indépendants

unité 2

2 - 2

Vous allez apprendre

- Les événements indépendants
- Les événements dépendants

les vocabulaires de base

- Les événements indépendants
- Les événements dépendants

Réfléchissez et discutez

Observez les exemples suivants

1- On jette une pièce de monnaie et un dé une seule fois

2- La réussite d'un élève en mathématiques et en chimie.

3- On tire deux boules l'une après l'autre avec remise d'une urne contient 10 boules.

4- La réussite d'un élève à l'examen pratique et à l'examen écrit de la physique.

5- On tire deux boules l'une après l'autre sans remise d'un sac contient 10 boules.

Que remarquez- vous ?

Dans les trois premiers exemples on remarque que

1- Les résultats du dé ne dépendent pas des résultats de la pièce de monnaie.

2- La réussite ou l'échec d'un élève en chimie ne dépend pas de sa réussite ou de son échec en mathématiques.

3- La remise de la première boule ne change pas le nombre de boules. Par conséquent, le deuxième tirage ne dépend pas du premier tirage.

Pour cela, les événements dans les trois premiers exemples sont indépendants.

4- La réussite d'un élève en physique dépend de sa réussite à l'examen pratique.

5- Le tirage sans remise d'une boule change le nombre des boulles. Par conséquent le tirage de la deuxième boule dépend du tirage de la première.

Pour cela, les événements dans les exemples (4) et (5) sont dépendants.

Apprendre deux évènements indépendants

Définition **deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

C'est-à-dire la probabilité de la réalisation de deux évènements indépendants ensemble est égale au produit de la probabilité de la réalisation de chacun

Aide pédagogique: Calculatrice scientifique- logiciel de graphisme.

On remarque que, si les deux événements A et B sont indépendants et $p(B) \neq 0$
alors $P(A \mid B) = P(A)$ **c'est-à-dire** que la réalisation de l'un de deux événements ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Par exemple : si on jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on note la suite de face ou pile , alors: U = { (P; P), (P;F) , (F; P), (F; F)}
D'où la probabilité de chaque événement $= \frac{1}{4}$
Soit l'événement A « obtenir pile au deuxième jet » = {(F ;P) ; (P ;P)}
Et l'événement B « obtenir face au premier jet » = {(F ;F) ; (F ;P)}

Alors $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(A)$

c-à-d. Alors la réalisation de l'événement A est indépendant de la réalisation de l'événement B. pour cela on dit que les deux événements A et B sont indépendants.

On remarque que: les deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si $P(A) \times p(B) = 0$, d'autre par si et seulement si la probabilité de A ou la probabilité de B soit égale à zéro.

Exemple

(1) Si on jette une pièce de monnaie une fois puis un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir face et le nombre 5

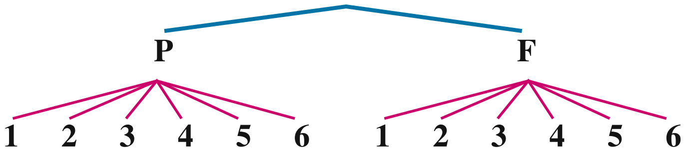
Solution

On peut utiliser l'arbre bondré pour écrire l'univers : on remarque que les résultats de la pièce ne dépendent pas des résultats du dé. Pour cela les deux événements sont indépendants.
Posons que A est l'événement « obtenir face, alors $P(A) = \frac{1}{2}$ et B est l'événement « obtenir le nombre 5, alors $P(B) = \frac{1}{6}$

$\because P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$\therefore$ la probabilité d'obtenir face et le nombre 5 est $\frac{1}{12}$

Remarque On peut déterminer la probabilité d'obtenir face et le nombre 5 directement par l'écriture de l'univers comme indique la figure ci-contre.



S = {(F ; 1) ; (F ; 2) ; (F ; 3) ; (F ; 4) ; (F ; 5) ; (F ; 6) ; (P ; 1) ; (P ; 2) ; (P ; 3) ; (P ; 4) ; (P ; 5) ; (P ; 6) }
L'événement « obtenir face et le nombre 5 » = {(F ; 5)}
d'où la probabilité d'obtenir face et le nombre 5 = $\frac{1}{12}$

Essayez de résoudre:

(1) Dans l'exemple précédent. Déterminer la probabilité d'obtenir pile et un nombre premier.

Exemple

(2) A et B sont deux événements de l'univers d'une expérience aléatoire U. Si p(A) = 0,5 ; P(B) = 0,6 ; P(A ∪ B) = 0,8. Démontrez que A et B sont indépendants.

Solution

$\because$ P (A ∩ B) = P (A) + P(B) - P (A ∪ B)

$\therefore$ P (A ∩ B) = 0,5 + 0,6 – 0,8 = 0,3 **(1)**

$\because$ P(A)×P(B) = 0,5 × 0,6 = 0,3 **(2)**

De **(1)** et **(2)**, On déduit que A et B sont indépendants .

Remarque que : Pour montrer la difference entre les événements incompatibles et les événements indépendants : on sait que, si on jette une pièce de monnaie une fois, alors l'univers est U = {F ; P} et P (F) = $\frac{1}{2}$, et P(p) = $\frac{1}{2}$ les deux événements sont incompatibles d'où.

P({F} ∩ {P}) = 0

$\therefore$ P ({P} ∩ {F}) = zero , $\therefore$ P ({P} ∩ {F}) ≠ P(P) × P (F)

Alors les deux événements sont incompatibles mais ils ne sont pas indépendants.

Essayez de résoudre

(2) Si A et B sont deux événements d'un univers d'une expérience aléatoire, tel que : U = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} ; A = {2 ; 3 ; 5 ; 6} et B = {1 ; 4 ; 5 ; 6}. A et B sont-ils indépendants? justifierz.

Exemple

(3) Lien à l'assurance : Un homme et sa femme assurent pour leurs vies dans une des compagnies d'assurance. La compagnie propose que : la probabilité que l'homme vive plus que 20 ans est 0,2 et la probabilité que sa femme vive la même durée et 0,3. Détermine la probabilité que:

a) L'homme et sa femme vivent ensemble plus que 20 ans.

b) L'un des deux au moins vive plus que 20 ans.

c) L'un des deux seulement vive plus que 20 ans.

Solution

Posons que, A l'événement « l'homme vive plus que 20 ans » $\therefore$ p (A) = 0,2

B l'événement « la femme vive plus que 20 ans » $\therefore$ p (B) = 0,3

a) La probabilité que l'homme et sa femme vivent ensemble plus que 20 ans = p (A ∩ B)

$\because$ P (A ∩ B) = P (A) × P(B) $\therefore$ P (A ∩ B) = 0,2 × 0,3 = 0,06

b) la probabilité que l'un au moins vive plus que 20 ans = p (A ∪ B)

$\because$ P (A ∪ B) = P (A) + P (B) - P (A ∩ B) $\therefore$ P (A ∪ B) = 0,2 + 0,3 – 0,06 = 0,44

c la probabilité que l'un seulement vive plus que 20 ans = P (A ∪ B) - P (A ∩ B)

$\therefore$ P(A ∪ B) - P(A ∩ B) = 0,44 – 0,06 = 0,38

Essayez de résoudre

3 Lien au tournage : Deux soldats A et B tirent vers une cible. Si la probabilité que A atteigne la cible est 0,6 et la probabilité que B atteigne la cible est 0,5. Déterminez les probabilités des événements suivants :

a La cible est atteinte par A et B ensemble.

b la cible est atteinte par un soldat au moins .

c La cible est atteinte par un seul soldat. **d** La cible n'est pas atteinte .

Exemple

4 Tirage avec remise: Une urne contient 6 boules bleues et 4 boules rouges. Si on tire deux boules l'une après l'autre avec remise, quelle est la probabilité que

a Les deux boules soient rouges ? **b** les deux boules soient bleues ?

c la première soit rouge et la seconde soit bleu ? **d** l'une soit rouge et l'autre soit bleue?

Solution

a Puisque le tirage avec remise, alors les deux événements sont **indépendants.**

Posons que l'univers U, A le premier tirage, B le second tirage.

$\therefore$ n (U) = 10 , $P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$ **(puisque le tirage avec remise)**

$\because P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

De la même façon:

b la probabilité que les deux boules soient bleues $= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$

c la probabilité que la première soit rouge et la seconde soit bleue $= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

d la probabilité que l'une soit rouge et l'autre soit bleue= la probabilité que la première rouge et la seconde bleue + la première bleue et la seconde rouge $= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}$ $= \frac{12}{25}$

Essayez de résoudre

4 Si la probabilité de la hausse de l'indice boursier de l'Etat (A) est égale à 0,84 et la probabilité de la hausse de l'indice boursier de l'Etat (B) est égale à 0,75. Quelle est la probabilité que la hausse de l'indice boursier des Etats (A et B) augmente ?

Apprendre Les événements dépendants

A et B sont deux événements dépendants, si : $\mathbf{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$

Car on sait de la définition de la probabilité conditionnelle que :

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ à condition que $P(B) \neq 0$

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ à condition que $P(A) \neq 0$

I.e. On peut écrire $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$

$= P(B \mid A) \times P(A)$ $\quad P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

C'est – à – dire A et B sont dépendants si la probabilité de l'un change d'une manière quelconque à la probabilité de l'autre .

La probabilité des événements dépendants:

Exemple

5 Si U est l'univers d'une expérience aléatoire tel que U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, et A = {1; 2; 4; 8} et B ={2; 5; 6; 7}. A et B sont ils indépendants ? Justifiez vos réponse.

Solution

$\because n(A) = 4$ $\quad \therefore P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\quad \because n(B) = 4$ $\quad \therefore P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\because A \cap B = \{2\}$ $\quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ **(1)**

$\because P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, alors A et B sont dépendants.

Essayez de résoudre:

5 De l'exemple précédents, si C = {2 ; 3 ; 4 ; 7} B et C sont-ils indépendants ? justifiez Vos réponse.

Tirage sans remise:

Exemple

6 Une urne contient 6 boules bleues et 4 boulles rouges. Si on tire deux boules l'une après l'autre sans remise, quelle est la probabilité que :

a les deux soient rouges ? b les deux soient bleus ?

c la première soit rouge et la seconde soit bleue ?

Solution

C'est l'exemple (3) mais sans remise, pour cela les deux évènements sont dépendants.

a Si les deux boules sont rouges, alors

la probabilité que la première est rouge et la seconde est rouge =

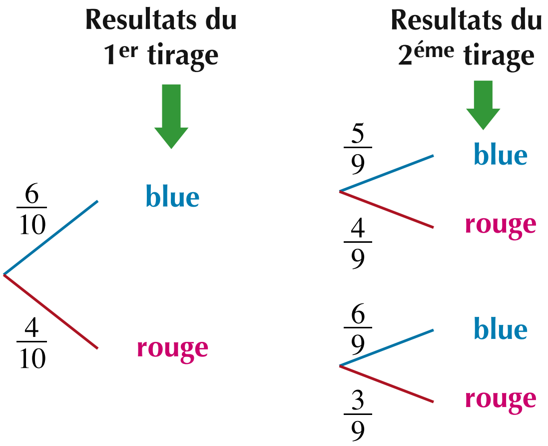
la probabilité que la première est rouge × la probabilité que la seconde est rouge sachant que la première est rouge

$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

b Si les deux boules sont bleues, alors la probabilité que la première soit bleue et la seconde est bleue = $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

c la probabilité que la première boule soit rouge et la seconde soit bleu =
la probabilité que la première boule soit rouge × la probabilité que la seconde soit bleue sachant que la première est rouge
$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$

on peut utiliser l'arbre pondérée, comme illustre la figure ci-contre pour déterminer les probabilités des événements dépendants.



Essayez de résoudre

6 Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On tire deux boules l'une après l'autre sans remise. Quelle est la probabilité que :

a les deux boules soient noires ?
b la première soit noire et la seconde soit rouge ?
c l'une des deux boulles soit rouge et l'autre soit noire ?

Exercises 2 - 2

1 Lesquels des événements suivants sont indépendants et lesquels sont dépendants ? vérifiez vos réponses?

a On jette une pièce de monnaie puis un dé une seule fois.
b On tire une carte d'une boite sans remise puis on tire une autre de même boite.
c On tire une carte d'une boite avec remise puis on tire une autre de même boite.
d Une équipe de football s'est qualifiée au demi-finale, s'il gagne, il joue le finale.
e On choisit un nom au hasard sans remise, puis on choisit un autre.
f On choisit une boulle d'une urne sans remise puis on tire une autre de même urne.
g Karim se présente au concours culturel le lundi et il réussi et se présente au concours scientifique le jeudi et réussi aussi ?.

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées:

2 Si A et B sont deux événements indépendants et P(A) = 0,2 et P(B) = 0,6, alors $P(A \cup B)$ =

a 0,12 b 0,32 c 0,68 d 0,8

3 Si A et B sont deux événements indépendants telque P(A) = 0,25 et P(B) = 0,4,

alors P(A – B) =

a 0,1 b 0,15 c 0,3 d 0,65

4 Si A et B sont deux événements indépendants tel que P(A) = 0,3 , P(B) = x et P(A ∪ B) = 0,72, alors x est égale à :

a 0,24 b 0,28 c 0,4 d 0,6

5 On jette une pièce de monnaie puis un dé une seule fois. Quelle est la probabilité d'obtenir face et le nombre 3 ?

6 On jette une pièce de monnaie quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir pile 4 fois ?

7 On jette un dé une fois, si A est l'événement « obtenir un nombre pair »; B est l'événement «obtenir un nombre carré parfait ». A et B sont – ils indépendants ? Justifiez vos réponse.

8 Si A et B sont deux événements d'un univers d'une expérience aléatoire tel que : P(B) = 0,3 , P(A ∪ B) = 0,5. Trouvez la valeur de P(A) si A et B sont :

a incompatibles. b indépendants.

9 Une urne contient des billes 2 sont rouges, 3 sont vertes et une est bleue. On choisit deux billes au hasard l'une après l'autre avec remise. Déterminez la probabilité que les deux billes soient vertes.

10 Dans la question précédente si on choisit deux billes sans remise. Déterminez la probabilité que la première soit bleue et la seconde soit verte.

11 Une urne contient 6 boules rouges, 4 boules oranges, 3 jaunes, 2 bleues, 5 vertes. On choisit deux boules l'une après l'autre au hasard sans remise.
Déterminez la probabilité que les boules tirées soient:

a Rouge et bleue. b rouge et jaune. c rouges. d orange et bleue.

12 Deux soldats A et B tirent en même temps sur une cible, si la probabilité que le premier atteigne la cible est 0,4 et la probabilité que le deuxième atteigne la cible 0,7,
Premièrement : trouvez la probabilité que :

a Les deux soldats atteignent la cible ensemble.

b L'un de deux au moins atteigne la cible.

c L'un de deux seulement atteigne la cible.

d L'un de deux au plus atteigne la cible.

Deuxièmement : On sait que l'un de deux soldats au moins atteigne la cible. Déterminez la probabilité que le soldat A seulement atteigne la cible.

13 Si A et B sont deux événements indépendants, démontrez que les pairs des événements suivants sont indépendants .

a A', B' b A', B c A, B'

Résumé de l'unité

1 *La probabilité d'un événement quelconque (A)*

$$P(A) \text{ (la probabilité de la réalisation de l'événement A)} = \frac{\text{le nombre d'éléments de l'événement } n(A)}{\text{le nombre d'éléments de l'univers } n(U)}$$

2 *Evenements incompartibles:* Deux événements incompatibles sont les deux événements qui n'ont pas d'éléments commun et leur intersection est l'ensemble vide ϕ .

Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $A \cap B = \phi$

$\therefore$ $P(A \cap B)$ =Zéro et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3 *Evénements compatitales:* Deux événements compatibles sont deux événements qui peuvent réalisér ensemble (ont des éléments commun) et , $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4 *probabilité conditionnelle :* Si U est un univers d'une expérience aléatoire, A et B sont deux événements de l'univers, alors la probabilité de la réalisation de A à condition que la réalistion de B noté p(AlB) qui se lit la réalisation de A sachant que la réalistion de B tel que :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{où } P(B) > 0$$

5 *Deux événements indépendants:* Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

c'est-à-dire la probabilité de la réalisation de deux événements indépendants ensemble est égale au produit de la probabilité de la réalisation du premier événement par la probabilité de la réalisation du deuxième événement.

On remarque que si A et B sont indépendants et $P(B) \neq 0$

alors $P(A \mid B) = P(A)$

C'est-à-dire la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

6 *les événements dépendants*

A et B sont dépendants, si $\mathbf{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$

De la définition de la probabilité conditionnelle, on sait que :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{à condition que } P(B) \neq 0 ,$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{à condition que } P(A) \neq 0$$

c-à-d. on peut écrire: $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$

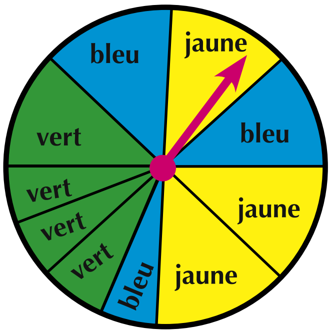
$= P(B \mid A) \times P(A)$ à condition que $P(A) \neq 0 , P(B) \neq 0$

C'est-à-dire : les deux événements A et B sont dépendants, si la probabilité de la réalisation de l'un de deux événements influence d'une manière quelconque sur la probabilité de la réalisation de l'autre.

Exercices Généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si A et B sont deux événements incompatibles et P(A)= 0,2 ; P(B)= 0,6 et $P(A \cup B)$ =
   - a 0,4
   - b 0,6
   - c 0,8
   - d 1,2
2. Si $A \subset B$ et $P(A') = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, alors $P(A | B)$:
   - a $\frac{1}{5}$
   - b $\frac{3}{5}$
   - c $\frac{4}{5}$
   - d $\frac{3}{20}$
3. Si A et B sont deux événements indépendants et P(A)= 0,2 , P(B)= 0,5, alors $P(A \cap B)$ =
   - a 0,7
   - b 0,4
   - c 0,3
   - d 0,1
4. Si U = {A ; B ; C} et A ; B et C sont incompatibles P (A) = 0,25 ; P (B) = 0,4 alors P (C) =
   - a 0,1
   - b 0,15
   - c 0,35
   - d 0,65
5. Si A et B sont deux événements indépendants de U tel que P (B) = 0,6 et $P(A \cup B)$ = 0,68 alors P (A) =
   - a 0,2
   - b 0,3
   - c 0,4
   - d 0,5
6. Si on tire une boule aléatoirement d'une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10 ; 5 boules bleues numérotées de nombres impairs de 1 à 9. Si on tire une boule rouge, quelle est la probabilité qu'elle porte le nombre 9?
7. 25 % des élèves d'une école ont échoué en mathématiques, 10% d'eux ont échoué en chimie et en mathématiques. On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité que cet élève a échoué en chimie sachant qu'il a échoué en mathématiques ?
8. Lien à la famille : Une familles a 3 enfants. Si l'événement A «une famille a des filles et des garçons» l'événement B «la famille a un garçon au plus» les événements A et B sont - ils indépendants? Justifiez vos réponse.
9. On jette un dé une fois et on tourne une roulette comme indique la figure ci-contre : Déterminez la probabilité des événements suivants:
   - a P (3 ; secteur vert)
   - b P (nombre premier ; secteur bleu)
   - c P (5 ; secteur jaune)
   - d P (nombre pair ; secteur vert)



10. Si A et B sont deux événements incompatibles d'un univers d'une expérience aléatoire tel que :
    $P(A - B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, Trouvez : P (A) , P (B) , $P(A' \cup B')$
11. On jette un dé deux fois de suite : déterminez la probabilité :
    - a obtenir le nombre 5 une fois sachant que ont obtient le même nombre dans les deux jets.
    - b obtenir le nombre 4 une fois sachant que on obtient un nombre plus grand que 3 dans les deux jets.
    - c Le nombre 3 n'est pas apparu dans les deux jets sachant que on obtient un nombre impair dans les deux jets .

12 Dans un concours, on a proposé une question à deux participants A et B. Si la probabilité que le premier resolve la question est 0,6 et la probabilité le deuxième resolve la question est 0,8. Trouvez la probabilité que :

a la question soit résolue par A et B ensemble **b** la question soit résolue par l'un au moins.

c la question soit pas résolue.

13 Une urne contient 26 cartes dont 10 sont rouges et 16 sont vertes. On tire aléatoirement deux cartes l'une après l'autre sans remise. Quelle est la probabilité que :

a les deux cartes soient rouges ? **b** les deux cartes sont vertes

c la première carte soit rouge et l'autre soit verte ?

d la première carte soit verte et l'autre soit rouge

14 On veut former deux équipes des élèves, pour cela ils tirent des cartes numérotés de 1 à 9 tel que :

L'équipe A « les élèves qui tirent les cartes portant les nombres impairs »

L'équipe B « les élèves qui tirent les cartes portant les nombres pairs »

a sachant qu'un élève d'équipe A qu'est la probabilité qu'il tirait le nombre 7 ?

b sachant qu'un élève d'équipe B qu'est la probabilité qu'il tirait le nombre 4 ?

15 Le tableau suivant représente la distribution de 50 personnes selon l'enfumage et infection de maladie .

a \ b	malade	N'est pas malade
Fumeur	30	10
N'est pas fumeur	2	8

Si on choisit une personne , déterminez la probabilité que :

a cette personne soit malade.

b cette personne soit malade sachant qu'elle est fumeur.

c cette personne soit malade sachant qu'elle n'est pas fumeur.

16 Le tableau suivant représente la distribution de 10 personnes :

	Elève	Ouvrier
sportif	4	1
N'est pas sportif	3	2

Si on choisit une personne aléatoirement, déterminez la probabilité que l'une soit un élève sportif et l'autre soit non sportif.

a Si le choix est avec remise. **b** Si le choix est sans remise.

Pour plus d'activités et des exercices, visite www.sec3mathematics.com.eg

Epreuve cumulative

Questions à courtes réponses :

Premièrement : complète :

1. La probabilité de l'événement impossible = ...
2. Si on jette un dé une fois, alors la probabilité d'obtenir le nombre 3 = ...
3. Si on choisit aléatoirement l'un des chiffres du nombre 37450, alors la probabilité que le chiffre choisi soit pair = ...
4. La plus grande valeur du coefficient de corrélation, si la corrélation est directe parfait = ...

Deuxièmement : Choisissez la bonne réponse :

5. Si on jette un dé une fois, alors la probabilité d'obtenir un nombre plus grand ou égale à 6 est égale à

   a Zéro b $\frac{1}{6}$ c $\frac{5}{6}$ d 1

6. Une urne contient 48 boules identiques des couleurs blanche, rouge et verte. On tire une boule, si la probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à 5/8, alors le nombre des boules rouges est égale à :

   a 24 b 30 c 32 d 36

7. La plus petite valuer du coefficient de correlation est :

   a -0,9 b -0,5 c 0,1 d 0,4

Question à longue réponse:

8. D'aprés le tableau suivant, déterminez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman :

Mention des maths	Excellant	Bien	Très Bien	Passable	Très Bien	Passable	Bien
Mention de Physique	Faible	Très Bien	Passable	Très Bien	Passable	Très Bien	Bien

9. Dans une conference mondiale de 150 membres dont 100 parlent l'anglais, 60 parlent le français 20 parlent les deux langues. On choisit un membre, déterminez la probabilité qu'il :

   a parle l'une des deux langues au moins.
   b parle l'anglais sachant qu'il parle le français.
   c parle le français sachant qu'il parle l'anglais

10. Une urne contient 12 boules jaunes et 8 boules rouges. On tire deux boules l'une après l'autre sans remise, quelle est la probabilité que :

   a les deux boules soient jaunes ?
   b la première boule soit jaune et l'autre soit rouge ?
   c les deux boules soient rouges ?

Unité
3

Variable aléatoire et distributions de probabilités

introduction

On a déjà étudié l'expérience aléatoire et des notions de la probabilité. Souvent, on veut traiter les résultats qualitatifs d'une expérience aléatoire comme des valeurs quantitatifs pour faciliter les calculs mathématiques.

Pour cela on transforme les résultats qualitatifs aux valeurs numériques appelées variable aléatoire qui décrit les issues de l'expérience aléatoire. Dans cet unité on étudie deux sortes de variables aléatoires :

- Variable aléatoire discrète
- Variable aléatoire contenue

On étudie aussi les distributions de probabilités de variable aléatoire :

- La distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète
- La distribution de la probabilité d'une variable aléatoire continue (fonction de densité)

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Savoir la notion de la variable aléatoire et distinct la variable aléatoire discrète et la variable aléatoire continue
- Savoir la notion de la fonction de densité d'une variable aléatoire continue et ses propriétés et l'utiliser pour calculer la probabilité de la réalisation de la variable aléatoire dans un intervalle quelconque.
- Savoir la notion de la moyenne (Espérance) et la variance
- Déterminer l'écart-type d'une variable aléatoire
- Déterminer le coefficient de variation.
- Savoir les distributions continues

Vocabulaires de base

- *Variable aléatoire*
- *Distribution de probabilité*
- *coefficient de variation*
- *Variable aléatoire discrète*
- *Espérance (moyenne)*
- *fonction de densité*
- *Variance*

Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): variable aléatoire.

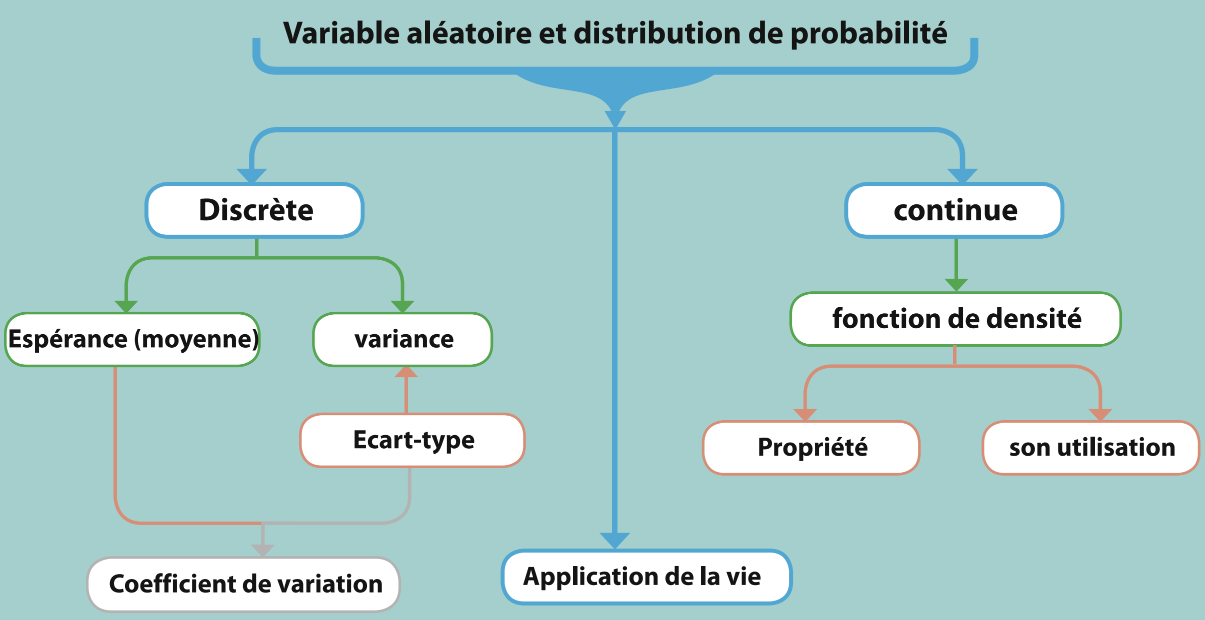
Leçon (1 - 2): Espérance (moyenne) et variance d'une variable aléataire discrète.

Leçon (1 - 3): fonction de densité d'une variable aléataire conténue.

Aide pédagogiques

calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



unité 3
3 - 1

Variable aléatoire discrète

Apprendre

- Variable aléatoire
- Variable aléatoire continue
- Variable aléatoire discrète
- Distribution de probabilité

Vocabulaires de base

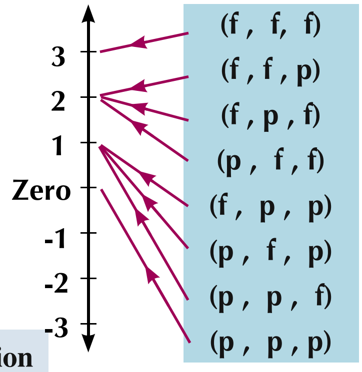
- Variable aléatoire
- Variable aléatoire continue
- Variable aléatoire discrète
- Distribution de probabilité

Introduction : vous avez déjà étudié l'expérience aléatoire et trouvé son univers. Dans cette leçon on décrit une nouvelle variable lien à l'expérience aléatoire (variable aléatoire)

Dans cette leçon vous allez aussi étudier : comment décrire les issues de deux phénomènes différents à partir de leur relation.

Variable aléatoire :

Si on jette une pièce de monnaie trois fois de suite, alors l'univers U est déterminé comme l'indique la figure ci-contre. S'il demande « le nombre des faces apparues» on peut tracer un diagramme qui montre la relation de U (variable indépendant) vers R (variable dépendant). Cette relation est une fonction X : U → R où X représente la variable aléatoire .



Définition

La variable aléatoire est une fonction dont l'ensemble de définition est l'univers U et l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des nombres réels R.

Rappel

Une fonction est déterminée par :

- **Ensemble de définition**
- **Ensemble d'arrivée**
- **La règle de la fonction**

L'ensemble d'images est l'ensemble des images des éléments de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée.

Dans l'exemple précédant l'ensemble image = {0 ; 1 ; 2 ; 3}

Remarque: la variable aléatoire est une partition de l'univers. Elle le partage en évènements incompatibles dont chacun est un antécédent d'un élément de l'ensemble des nombres réels. Cette relation représente une fonction X de l'univers u vers l'ensemble des nombres réels R.

Variable aléatoire discrète

Définition

La variable aléatoire discrète (discontinue) : son ensemble d'image est un ensemble fini des nombres réels c'est-à-dire dénombrable.

Aide pédagagique

- Calculatrie scientifique , logiciel de graphisme .

Par exemple :

- Le nombre d'actions IPO attribué à une personne dans une société anonyme.
- Le nombre d'accidents sur l'autoroute pendant une semaine .
- le nombre d'appel d'une famille pendant un mois .

Exemple **Variable aléatoire discrète**

1 On jette une pièce de monnaie trois fois de suite. soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur « le nombre de piles – le nombre de faces » écrivez les issues de la variable aléatoire.

Solution

E = { (F , F , F) , (F , F , P) , (F , P , F) , (F , P , P) , (P , F , F) ,
(P , F , P) , (P , P , F) , (P , P , P) }

Événements Liés	X : nombre de piles – nombre de faces
(P , P , P)	3 – 0 = 3
(P , P , F)	2 – 1 = 1
(P , F , P)	2 – 1 = 1
(P , F , F)	1 – 2 = – 1
(F , P , P)	2 – 1 = 1
(F , P , F)	1 – 2 = – 1
(F , F , P)	1 – 2 = – 1
(F , F , F)	0 – 3 = – 3

Les issues = {- 3 ; - 1 ; 1 ; 3 }

Essayez de résoudre

1 Dans l'exemple précédant, déterminez les issues de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « le nombre de piles × le nombre de faces».

Exemple **Variable aléatoire discrète**

2 On jette un dé deux fois de suite. Déterminez les issues de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « la somme de deux nombres apparus » .

Solution

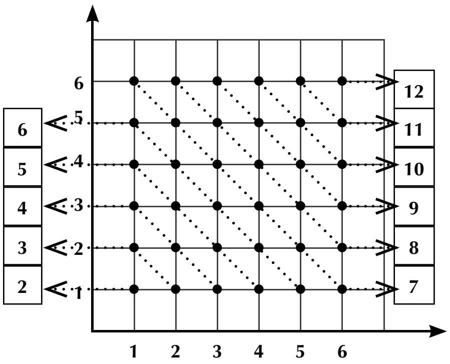
Univers	X : la somme de deux nombres
(1 , 1)	2
(1 , 2) , (2 , 1)	3
(3 , 1), (2 , 2), (1 , 3)	4
(4 , 1) , (3 , 2) , (2 , 3) , (1 , 4)	5
(5 , 1), (4 , 2), (3 , 3), (2 , 4), (1, 5)	6

Univers	X : la somme de deux nombres
(4 , 3) ,(3 , 4) ,(2 , 5) ,(1 , 6), (6 , 1) , (5 , 2)	7
(6 , 2), (5 , 3), (4 , 4), (3 , 5), (2 , 6)	8
(6 , 3), (5 , 4), (4 , 5), (3 , 6)	9
(6 , 4) , (5 , 5) , (4 , 6)	10
(6 , 5) , (5 , 6)	11
(6 , 6)	12

Du tableau précédant on trouve que l'ensemble image de la variable aléatoire

x = {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 }

On peut utiliser le diagramme ci – contre pour déterminer les issues de la variable aléatoire .



Essayez de résoudre

2 Dans l'exemple précédant, déterminez les issues de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « le plus grand des deux nombres apparus »

Distribution de probabilité

Fonction de la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition

Si l'ensemble image d'une variable aléatoire diseréte X est { x_1; x_2;x_3; ....; x_r }, alors la fonction f définié par $f(x_r)=P(x=x_r)$ pour tout r = 1;2;3;... déterminé une distribution de probabilité de la variable X qui exprimes les ensemble des couples

C'est-à- dire la distribution de probabilités de la variable aléatoire X = { $(x_1, f(x_1))$, $(x_2 , f(x_2))$, $(x_3 , f(x_3))$, ... , $(x_r , f(x_r))$ }

Remarque : on peut écrire la distribution de probabilités de la variable aléatoire x sous la forme d'un tableau comme ce qui suit :

x_r	x_1	x_2	x_3	......	x_r
$f(x_r)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	......	$f(x_r)$

On remarque que la fonction f dans la définition précédente vérifie les deux conditions suivantes :

1- $f(x_r) \geqslant 0$ pour tout **r** = 1 ; 2 ; 3 ; ...... ; n

2- $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_r) = 1$

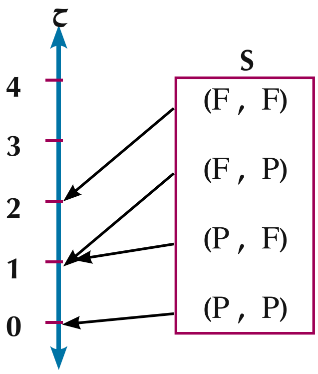
Exemple la fonction de la distribution de probabilités

3 On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Ecrivez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X qui prend pour valeur « le nombre de fois où face apparue »

Solution

P = { (F , F) , (F , P) , (P , F) , (P , P) }

Dans la figure ci-contre, on trouve que l'ensemble image de la variable aléatoire qui exprime le nombre de fois où face a pparait = { 0 ; 1 ; 2 }



$$f(0) = P(X = 0) = \frac{n(x_1)}{n(u)} = \frac{1}{4}$$

$f(1) = P(X = 1) = \frac{n(x_2)}{n(u)} = \frac{2}{4}$, $f(2) = P(X = 2) = \frac{n(x_3)}{n(u)} = \frac{1}{4}$

La distribution de probabilités est :

x_r	0	1	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Essayez de résoudre

3 Dans l'exemple précédant, écrivez la distribution de probabilité de la variable aléatoire X qui représente « le nombre d'apparition de face – le nombre d'apparition de pile ».

Exemple

Tirage sans remise

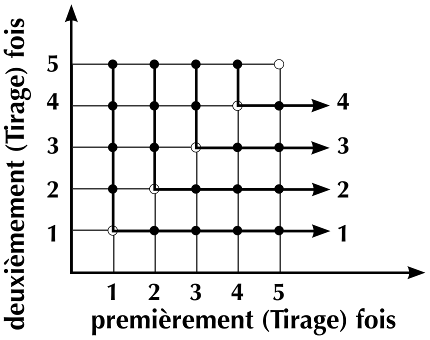
4 Une boite contient 5 cartes identiques numérotées de 1 à 5. On tire deux cartes successivement sans remise. Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire qui représente « le plus petit des deux nombres apparus »

Solution

Puisque le tirage est sans remise, alors le nombre apparu premièrement n'apparait pas dans le deuxième tirage. C'est-à-dire que les couples (1 ; 1) , (2 ; 2) , (3 ; 3) , (4 ; 4) , (5 ; 5) ne se trouvent pas dans l'univers comme l'indique la figure ci-contre.

$n(u) = 20$

De la figure ci-contre, on trouve que l'ensemble le image de la variable aléatoire X est :



$X = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ et:

$f(1) = P(X = 1) = \frac{8}{20}$

$f(2) = P(X = 2) = \frac{6}{20}$

$f(3) = P(X = 3) = \frac{4}{20}$

$f(4) = P(X = 4) = \frac{2}{20}$

La distribution de probabilités de la variable aléatoire X est :

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

Essayez de résoudre

4 On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure. Déterminez la distribution de probabilité de la variable aléatoire qui prend pour valeurs « le plus grand des deux nombres apparus »

Exemple Utilisation de la règle de la fonction

5) Si X est la variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité définie par :

$f(x) = \frac{k + 2x}{24}$ où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 Trouvez la valeur de k puis écrivez la distribution de probabilité.

Solution

$\because f(0) = P(X = 0) = \frac{k}{24}$, $f(1) = P(x = 1) = \frac{k+2}{24}$,

$f(2) = P(X = 2) = \frac{k+4}{24}$, $f(3) = P(x = 3) = \frac{k+6}{24}$

$\because P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

$$1 = \frac{k+6}{24} + \frac{k+4}{24} + \frac{k+2}{24} + \frac{k}{24}$$

$$1 = \frac{k + k + 2 + k + 4 + k + 6}{24} \qquad \therefore 4k + 12 = 24$$

$\therefore 4k = 24 - 12$ $\qquad \therefore 4k = 12$ $\qquad \therefore k = 3$

Pour déterminer la distribution de probabilité, on détermine :

$P(X = 0) = \frac{k}{24} = \frac{3}{24}$, $P(X = 1) = \frac{k+2}{24} = \frac{5}{24}$

$P(X = 2) = \frac{k+4}{24} = \frac{7}{24}$, $P(X = 3) = \frac{k+6}{24} = \frac{9}{24}$

$\therefore$ la distribution de probabilité est :

x_r	0	1	2	3
$f(x_r)$	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$

Essayez de résoudre

5) Si X est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble image = {1 ; 2 ; 3} La distribution de probabilité est définie par $f(x) = \frac{ax}{9}$. Trouvez la valeur de a puis écrivez la distribution de probabilité.

Exercises 3 - 1

Premièrement : choisissiez la bonne réponse des réponses données :

1. La quelle des fonctions suivantes représente une distribution de probabilités d'une variable aléatoire X :

a

x_r	1	2	3	4
$f(x_r)$	0,06	0,15	0,42	0,26

b

x_r	0	1	3	5
$f(x_r)$	0,5	0,3	0,4	–0,2

c

x_r	–2	–1	1	2
$f(x_r)$	0,32	0,14	0,23	0,31

d

x_r	3	4	5	6
$f(x_r)$	0,23	0,32	0,17	0,18

2. Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image est {0 ; 1 ; 2} alors toutes les fonctions suivantes ne représentent pas une distribution de probabilité sauf :

a $f(x) = \frac{x^2 + 1}{8}$ b $f(x) = \frac{2x + 1}{3}$ c $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ d $f(x) = \frac{3x - 1}{6}$

3. Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image est P (x = 1) = 0,3 ; P (x = 2) = 0,5, alors P (x= 3) est égale à :

a 0,1 b 0,2 c 0,7 d 0,8

4. Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image est {1 ; 2 ; - 1 ; 0 }, P(X = - 1) = 0,2 et P(X = 0) = 0,4 , P(X = 1) = 0,1 alors P(X > 1) est égale à :

a 0,3 b 0,4 c 0,5 d 0,6

5. On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et X est la variable aléatoire qui prend pour valeur « le nombre des faces – le nombre des piles » alors l'ensemble image est de x sont :

a {1 ; 3} b {0 ; 1 ; 3} c { 0 ; 1 ; 2 ; 3} d {-3 ; -1 ; 1 ; 3}

6. Si X est une variable aléatoire dont les issues = { 0 ; 1 ; 2}. Si la fonction de la distribution de probabilité est définie par la relation $f(x) = \frac{ax}{6}$, alors la valeur de a est égale à:

a $\frac{1}{2}$ b 1 c $\frac{3}{2}$ d 2

deuxièmement : répondez aux questions suivantes :

7. Les tableaux suivants représentent des distributions de probabilités d'une variable aléatoire X. Trouvez la valeur de a dans chaque tableau :

a

x_r	1	2	2	3
$f(x_r)$	a	2a	2a	3a

b

x_r	-2	–1	0	1	2
$f(x_r)$	a	0,2	0,3	3a	a

c

x_r	0	1	3	4
$f(x_r)$	a	$2a^2$	$3a^2$	3a

8 Si X est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble image = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 } et les valeurs $P(X = 0) = 0{,}2$, $P(X = 1) = 0{,}33$ et $P(X = 2) = 0{,}37$. Trouvez la distribution de probabilité de la variable X.

9 Si les valeurs de la variable aléatoire X dans une expérience aléatoire sont : -2 , 0 , 2 , 4 des probabilités $\frac{m}{5}$; $\frac{m+1}{5}$; $\frac{2m-1}{5}$ et $\frac{3m-2}{5}$ respectivement. Déterminez la valeur de m puis écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

10 Si X est une variable aléatoire discrète dont la fonction de la distribution de probabilité définie par la relation : $f(x) = \frac{2a + 3x}{54}$ et des issues x = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 } Déterminez la valeur de a puis écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

11 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité définie par la fonction : $f(x) = \frac{k + 3x}{50}$ où x = 1 ; 2 ; 3 ; 4. Déterminez la valeur de k puis écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

12 On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et X est la variable aléatoire qui prend pour valeur « le nombre des faces – le nombre des piles », écrivez la distribution de probabilité de la variable X.

13 Deux boites contiennent chacune 3 boules numérotées de 3 à 5. On tire une boule aléatoirement de chacune. X est la variable aléatoire « la somme des deux nombres marqués sur les boules tirées » Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire x.

14 On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure. Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X qui prend pour valeur « le plus petit des deux nombres apparus »

15 Une boite contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules l'une après l'autre avec remise. Déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X qui prend pour valeur « la moyenne des deux nombres apparus »

16 Si X est une variable aléatoire discrète qui représente le nombre des filles d'une famille de trois enfants. Ecrivez l'ensemble image de la variable X. Si la probabilité d'avoir fille est égale à la probabilité d'avoir garçon, déterminez la distribution de probabilités de la variable aléatoire X sachant qu'il n'y a pas de jumeaux. « On respecte l'ordre des enfants garçon ou fille »

Espérance (moyenne) et variance de la variable aléatoire discrète

Apprendre

- espérance (moyenne)
- Variance
- écart-type
- coefficient de variation

Vocabulaires de base

- Espérance (moyenne)
- coefficient de variation
- Variance

Avant – propos : Pour décrire la distribution de probabilité (pour décrire la population initiale ou pour comparer les populations différentes) on a besoin des informations pour mesurer la tendance centrale des issues de la variable aléatoire qu'est appelé l'espérance (moyenne). Il y a d'autre mesures pour mesurer la dispersion qu'est appelé la variance. L'espérance et la variance bien décrire les variables aléatoires.

Espérance (moyenne)

L'espérance est une valeur qui se trouve à peu près au milieu des valeurs et appelée aussi la moyenne qui noté (μ).
Si x est une variable aléatoire discrète dont f est la fonction de la distribution de probabilités et ses issues sont :{ x_1 ; x_2 ; x_3 ; ……. , x_n} de probabilités $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ……. , $f(x_n)$ respectivement, alors l'espérance est définie par la relation :

$$\text{Espérence } (\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r)$$

Alors : l'espérance (μ) $= x_1 \times f(x_1) + x_2 \times f(x_2) + x_3 \times f(x_3) + \ldots\ldots + x_n \times f(x_n)$

Exemple

1 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est définie par le tableau suivant :

x_r	-1	0	1	2	3
$f(x_r)$	0,3	0,1	0,1	**a**	0,2

Premièrement : Trouvez la valeur de a **deuxièmement** : Déterminez l'espérance (la moyenne)

Solution

Premièrement : on sait que la somme des probabilités est égale à un entier

$\because P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

$\therefore 0,3 + 0,1 + 0.1 + \mathbf{a} + 0,2 = 1$

$\therefore \mathbf{a} + 0,7 = 1$ $\quad\quad \therefore \mathbf{a} = 1 - 0,7 = 0,3$

Aide pédagogique

- Calculatrie scientifique - Logiciel de graphisme.

Deuxièmement :

$\because$ Espérence (μ) = $\sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = -1 \times 0,3 + 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2$

$= -0,3 + 0 + 0,1 + 0,6 + 0,6 = 1$

Essayez de résoudre

1) Si X est une variable aléatoire dont l'ensemble image = {0 , 1 , 2 , 3 , 4} tel que :

$P(X = 0) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$ et $P(X = 1) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$

Déterminez : **Premièrement** : P (X = 2) **deuxièmement** : l'espérance

Exemple

2) Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est comme ce qui suit :

x_r	0	1	2	b	6
$f(x_r)$	0,1	0,1	0,3	**a**	0,3

Déterminez les valeurs de a et b sachant que l'espérance $\mu = 3,5$

Solution

De propriétés de la distribution de probabilités : f(0) + f(1) + f(2) + f(b) + f(6) = 1

$\therefore 0,1 + 0,1 + 0,3 + \mathbf{a} + 0,3 = 1$ $\therefore \mathbf{a} = 1 - 0,8$ $\therefore$ **a = 0,2**

$\because$ expectation (μ) = $\sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = 3,5$

$\therefore 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,3 + b \times 0,2 + 6 \times 0,3 = 3,5$

$\therefore 0 + 0,1 + 0,6 + 0,2\, b + 1,8 = 3,5$ $\therefore 0,2\, b = 3,5 - 2,5$

$\therefore b = 1 \div 0,2 = 5$ **b = 5**

Essayez de résoudre

2) Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est commeé indique le tableau suivant :

x_r	0	2	3	4
$f(x_r)$	$\frac{3}{16}$	2 p	$\frac{1}{16}$	p

Premièrement : Trouvez la valeur de P. **deuxièmement** : l'espérance

Variance

La variance d'une variable aléatoire discrète x mesure la dispersion des issues de leur moyenne, notée (σ^2) et définie par la relation

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) - \mu^2$$

Remarque : l'écart-type de la variable aléatoire X est la racine carrée positive de la variance et noté σ . On remarque aussi que la variance et l'écart-type sont des valeurs positives.

Exemple

(3) Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est $f(x) = \frac{x+4}{16}$ où x = -2 ; m ; 1 ; 2. Déterminez la valeur de m puis déterminez la moyenne et la variance de la variable X.

Solution

De propriétés de la distribution de probabilités :

$\because P(X = -2) + P(X = m) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

$\therefore \frac{2}{16} + \frac{m+4}{16} + \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = 1$

$\therefore \frac{17+m}{16} = 1$ $\quad\quad \therefore 17 + m = 16$ $\quad\quad \therefore m = -1$

x_r	$f(x_r)$	$x_r \cdot f(x_r)$	$x^2_r \cdot f(x_r)$
-2	$\frac{2}{16}$	$\frac{-4}{16}$	$\frac{8}{16}$
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$
2	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{24}{16}$
		$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{2}$

$$\text{L'espérance } (\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = \frac{5}{8}$$

$$\text{La variance } (\sigma^2) = \sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) - \mu^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{135}{64}$$

Essayez de résoudre

(3) Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité déterminée par la fonction $f(x) = \frac{a}{x+1}$ où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 Trouvez:

Premièrement : la valeur de a **deuxièmement** : l'espérance et l'écart-type.

Coefficient de variation

L'écart-type est une mesure de la dispersion des issues d'une variable aléatoire de leur espérance et il a la même unité de mesure (degré ; mètre ; kg ; … etc.) alors il est valable pour comparer des ensembles des issues de même unité mais s'ils ont des unités différentes, on ne peut pas comparer en utilisant l'écart-type. Pour cela on a besoin d'autre mesure et le coefficient de variation est convenable pour résoudre ce problème .

Le coefficient de variation d'un ensemble des issues est le pourcentage de l'écart-type par rapport à son espérance (moyenne) et déterminé par la relation suivante :

$$\textbf{Coefficient de variation} = \frac{\textbf{L'écart-type}}{\textbf{Moyenne}} \times 100\ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$$

Ce coefficient représente la dispersion sous la forme d'un pourcentage sans unités.

Exemple

4 Si l'espérance et l'écart-type des notes d'un ensemble d'élèves dans les deux matières histoire et géographie comme ce que suit : sachant que la note finale est 100.

La mesure	L'examen de l'histoire	L'examen de géographie
Espérance	70	96
Ecart-type	7	8

Trouve le coefficient de variation de chaque matière. Que remarquez – vous ?

Solution

$\because$ Le coefficient de variation = $\dfrac{\text{L'écart-type}}{\text{Moyenne}} \times 100\ \%$

$\therefore$ Le coefficient de variation de l'histoire = $\dfrac{7}{70} \times 100\ \% = 10\ \%$.

Le coefficient de variation de la géographie = $\dfrac{8}{96} \times 100\ \% \simeq 8.3\ \%$

On remarque que : la dispersion proportionnelle de l'histoire est plus grande que la dispersion proportionnelle de la géographie, ce qui signifie que les élèves sont plus homogènes en géographie que l'histoire.

Essayez de résoudre

4 Une usine produit deux sortes des lampes A et B. Si leurs moyenne d' âges sont 1850 ; 1580 et leurs écart-types sont 250 ; 230 respectivement. Déterminez le coefficient de variation de chaque sorte. Que remarquez – vous ?

Exemple

5 Un sac contient 6 cartes où deux portent le nombre 2, trois portent le nombre 3 et une porte le nombre 11 On tire une carte au hasard. Si x est la variable aléatoire qui prend pour valeur " le nombre apparu sur la carte tirée"

Trouvez :

a la fonction de la distribution de probabilité de la variable X.

b L'espérance et l'écart-type de x **c** le coefficient de variation.

Solution

a X prend les valeurs 2 ; 3 ; 11 si: $f(2) = P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f(3) = P(X = 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $f(11) = P(X = 11) = \frac{1}{6}$

le tableau suivant représente la distribution de probabilité de la variable x.

x_r	2	3	11
$f(x_r)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Pour calculer l'espérance et l'écart-type on désigne le tableau suivant :

x_r	$f(x_r)$	$x_r \cdot f(x_r)$	$x^2_r \cdot f(x_r)$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{6}$
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{27}{6}$
11	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{121}{6}$
Total		4	26

b L'espérance $(\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r) = 4$

la variance $(\sigma^2) = \sum_{r=1}^{n} x^2 f(x_r) - \mu^2 = 26 - (4)^2 = 10$

l'écart-type $\sigma = \sqrt{10} = 3{,}16$

c $\because$ le coefficient de variation $= \dfrac{\text{L'écart-type}}{\text{Moyenne}} \times 100\ \%$

$\therefore$ le coefficient de variation $= \dfrac{3{,}16}{4} \times 100\ \% = 79\ \%$

Essayez de résoudre

5 un sac contient 10 cartes dont une porte le nombre 1 ; deux cartes portent le nombre 2 , trois portent le nombre 3 et quatre portent le nombre 4. On tire une carte aléatoirement. Si la variable aléatoire X représente « le nombre apparu sur la carte tirée »
Trouvez la fonction de la distribution de probabilité de la variable X puis calculez l'espérance, l'écart-type et le coefficient de variation.

Exercises 3 - 2

Premièrement : choisissiez la bonne réponse parmi réponses données :

1. Si la distribution de probabilité de la variable aléatoire X est {(0 ; 0,25) , (1 ; 0,5) , (2 ; 0,25) } alors l'espérance est égale à :

   a) 0,5 b) 1 c) 1,25 d) 1,5

2. Si X est une variable aléatoire discrète dont l'espérance est égale à 0,6 , $\sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) = 4{,}36$ alors l'écart-type est égale à :

   a) 1,94 b) 2 c) 3,76 d) 4

3. Si X est une variable aléatoire discrète dont l'espérance est égale à 0,4 , $\sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) = 6{,}16$ alors la variance est égale à :

   a) 2,4 b) 5,76 c) 6 d) 6,56

Deuxièmement : déterminez l'espérance et l'écart-type de la distribution de probabilité de ce qui suit :

4.

x_r	2	3	9
$f(x_r)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

5.

x_r	–5	–4	1	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

6.

x_r	–3	–1	0	1	2	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Troisièmement : répondez aux questions suivantes :

7. Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est indiquée au tableau suivant :

x_r	1	2	4	6
$f(x_r)$	0,2	0,3	**a**	0,1

   Premièrement : trouvez la valeur de a. deuxièmement : trouvez la moyenne et l'écart-type

8. Si les issues de la variable aléatoire X est {0 ;1 ;2 ;3 ;4} , $P(X = 1) = \frac{4}{25}$, $P(X = 2) = \frac{7}{25}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{5}$, déterminez l'espérance et la variance .

9. Si les issues de la variable aléatoire X est {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4} , $P(X = 0) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$ et $P(X = 1) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$ Déterminez : Premièrement : P(X = 2) deuxièmement: la moyenne et la variance de la variable X.

10. Si X est une variable aléatoire discrète dont la fonction de la distribution de probabilité est indiquée au tableau suivant : où $0 < h < 1$

x_r	–3	zero	3	6
$f(x_r)$	h	h^2	$2h^2$	h

trouvez:

a la valeur de h

b La distribution de probabilité de la variable X.

c la moyenne et la variance

11 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est indiquée au tableau suivant :

x_r	1	2	4	a
$f(x_r)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Calculez la valeur de a si l'espérance $\mu = 3$, puis trouvez l'écart-type de la variable aléatoire X.

12 Si la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est déterminée par la fonction f où : $f(x) = \frac{a\,x}{9}$, tel que x = 1; 2; 3 . Trouvez:

a la valeur de a b l'espérance et la variance de la variable X.

13 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est déterminée par la fonction : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{a}$ où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 :

a Déterminez la valeur de a b Calcule le coefficient de variation de la variable X.

14 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est déterminé par la fonction : $f(x) = \frac{x + 4}{16}$ où x = - 2, m, 1, 2 Trouvez: a Déterminez la valeur de m

b la moyenne et la variance de la variable x.

15 Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est déterminée par la fonction f où : $f(x) = \frac{a}{x + 3}$,où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3

a Déterminez la valeur de a b Déterminez l'espérance et la variance.

16 Si les issues de la variable aléatoire x est { -1 ; 0 ; 2 } et $P(X = -1) = \frac{1}{4}$ et l'espérance est égale à 1 trouvez :

a P(X = 0) , P(X = 2) b le coefficient de variation.

17 Si X est une variable aléatoire de moyenne $\mu = 3$ et dont la distribution de probabilité est comme ce qui suit :

x_r	0	2	k	4
$f(x_r)$	1	2a	$\frac{1}{4}$	5a

a calculez la valeur de a et k.

b trouvez l'écart-type de la variable X.

unité 3
3 - 3

Fonction de densité d'une variable aléatoire continue

A apprendre

- fonction de densité

Vocabulaires de base

- *densité de probabilité*

Variable aléatoire continue

Définition

L'ensemble d'image d'une variable aléatoire continue est un intervalle (ouvert ou fermé) de l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire : c'est un ensemble n'est pas dénombrable de l'ensemble des nombres réels.

Par exemple :

- Le salaire d'un ouvrier d'état qui est choisi aléatoirement.
- La température attendue pendant une journée.
- La taille d'un sélectionné à l'équipe de Basket-ball.

Exemple **Variable aléatoire continue**

6 Le point (x ; y) est situé à l'intérieur ou sur le cercle $x^2 + y^2 = 4$ dont le centre est le point L'origine O et de rayon 2 unités. Déterminez l'ensemble image de la variable aléatoire x qui prend pour valeur « la distance de ce point au centre du cercle »

Solution

$\because f = \{ (x , y): x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

$\therefore 0 \leqslant a \leqslant 2$ où a est la distance de (x ; y) au centre du cercle .

$\therefore$ l'ensemble image de la variable aléatoire X = [0 ; 2]

On remarque que tous les points dans cette région vérifient la variable aléatoire x comme l'indique la figure

Essayez de résoudre

1 L'âge virtuel d'un mobile (x) est 18 heures de fonctionnement. Ecrivez l'ensemble image de x.

Essayez de résoudre

2 Dans ce qui suit, déterminez la variable aléatoire discrète ou continue .

a Le nombre de pagettes produites par une boulangerie pendant une heure.

b Le temps pour que Karim attend son ami Ziad.

c Le nombre de buts marqués par l'équipe gagnant. dans une matche de hand-ball

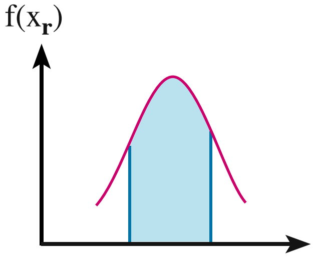
d Le nombre de violations de la circulation sur la route déserte Caire – Alex inscrit pendant une journée.

e Le temps pour qu'un enseignant explique la leçon 'la variable aléatoire'.

Aide pédagogique

- Calculatrie scientifique, logiciel de graphisme.

Fonction de densité



D'une variable aléatoire continue on associe une fonction réelle non négative notée f (x) appelée la fonction de densité. L'aire de la région compris entre la courbe de cette fonction dans un intervalle et l'axe des abscisses représente la probabilité de la variable aléatoire dans cet intervalle. On détermine $P(a<x<b)$ par calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure ci-contre .

Cette fonction vérifie les conditions suivantes :

- $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$ domaine de la fonction.
- L'aire de la région compris entre la courbe, l'axe des abscisses est égale à 1.

Exemple

1 Si x est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2x - 1)\ , & 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{zero} & , \text{ autrement} \end{cases}$$

a **Démontrez que :** $p(1 < X < 3) = 1$

b **Trouvez :** $P(X \leqslant 2)$; $p(X > 2{,}5)$et $p(2 \leqslant X \leqslant 2{,}5)$.

Solution

$$f(1) = \frac{1}{6} \times (2 - 1) = \frac{1}{6}$$

$$f(3) = \frac{1}{6} \times (6 - 1) = \frac{5}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{6} \times (4 - 1) = \frac{3}{6}$$

$$f(2.5) = \frac{1}{6} \times (5 - 1) = \frac{4}{6}$$

Rappel

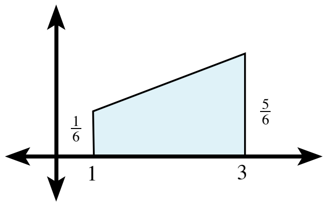
Aire d'une rectangle = longueur × largeur

Aire d'un triangle = $\frac{1}{2}$ base × hauteur correspondante

Aire d'un trapèze = $\frac{1}{2}$ Somme de deux bases parallèles × hauteur

a $$P(1 \leqslant x \leqslant 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) \times 2$$

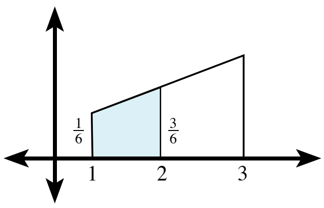
$$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{6} \times 2 = 1$$



b $$P(X \leqslant 2) = p(1 \leqslant X \leqslant 2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right) \times 1$$

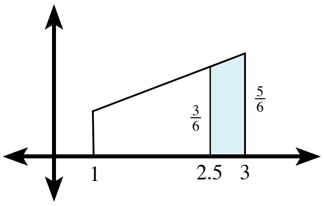
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$



, $P(x > 2{,}5) = p(2{,}5 < x \leqslant 3)$

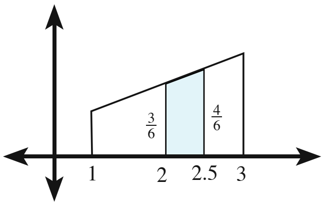
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$



, $P(2 \leqslant x \leqslant 2{,}5) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$



Remarquez que : $p(2 \leqslant x \leqslant 2.5) = 1 - [\, p(x \leqslant 2) + p(x \geqslant 2.5)\,]$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\right) = 1 - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$$

Essayez de résoudre

3 Si x est une variable aléatoire continue tel que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}(17 - 2x) & \text{si } 1 < x < 6 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

a **Démontrez que** f est une fonction de densité .

b **Trouvez** $P(X > 3)$

c **Trouvez** $P(4 < X < 7)$

Exemple

2 Si x est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + k}{24} & \text{tel que } 1 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

a Trouvez la valeur de k .

b Trouvez $P(X > 3)$

Solution

$\because P(1 < x < 4) = 1$

$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{10 + 2k}{24} = 1$

$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{2 + k}{24} + \frac{8 + k}{24}\right) \times 3 = 1$

$\therefore k = 3$

$f(3) = \frac{6 + 3}{24} = \frac{9}{24}$

$f(4) = \frac{8 + 3}{24} = \frac{11}{24}$,

$$\therefore P(x > 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{24} + \frac{11}{24}\right) \times 1 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{24} = \frac{5}{12}$$

Essayez de résoudre

4 Si x est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{28} & 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

a Trouvez la valeur de a si $P(x < a) = \frac{1}{7}$

b Trouvez la valeur de b si $P(b < x < b + 2) = \frac{1}{2}$

Exercices (3 - 3)

Premièrement : Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

1. Si la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 2 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{alors } P(X > 3) =$$

a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

2. Si la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & \text{si } 2 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{alors } k =$$

a $\frac{1}{6}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

3. Si la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } -3 < x < 3 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{alors } P(X = 3) =$$

a zero b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{2}$

Deuxièmement : Répondez aux questions suivantes :

4. Si X est une variable aléatoire continue tel que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{18} & \text{si } -3 < X < 3 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement**: p $(X < 0)$ **deuxièmement** : P $(-1 < X < 2)$

5. Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{24} & \text{si } 2 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : p $(3 < X < 5)$ **deuxièmement** : p $(x > 4)$

6. Si X est une variable aléatoire continue tel que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{27} & \text{si } 2 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Premièrement: Démontrez que: f est une fonction de densité

deuxièmement: P $(x > 3)$

7 Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{18} & \text{si } 1 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : $p(X > 3)$ **deuxièmement** : $p(2 < X < 4)$

8 Si X est une variables aléatoire continue dont la fonction de densité est:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de a **deuxièmement** : $p(1 < X < 3)$

9 Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + \mathbf{a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{zero} & \text{, autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de a **deuxièmement** : $p(1 < X < 3)$

10 Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\,x}{2} & \text{si } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de a **deuxièmement** : $p(1 < X < 3)$

11 Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{k} & \text{si } 1 < x < 5 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **premièrement** : trouvez la valeur de k **deuxièmement** : $p(2 < X < 3)$

Réflexion créative :

12 Si X est une variables aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculez : **a** $P(1 < x < 2)$ **b** la valeur de a qui rend $p(2 < x < \mathbf{a}) = 0,5$

13 Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{40} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$

et **a** ; b ∈ [1; 5[Trouvez

a la valeur de a si $P(a < x < a+2) = \frac{7}{20}$

b la valeur de b si $P(X > b) = \frac{69}{80}$

Résumé de l'unité

1 Variable aléatoire :

C'est une fonction dont l'ensemble de définition est l'univers U et son ensemble d'arriver est l'ensemble des nombres réels R.

2 Variable aléatoire discrète (discontinue) :

Son ensemble image est un ensemble limité (fini) c'est-à-dire dénombrable de l'ensemble des nombres réels.

3 Variable aléatoire continue :

Son ensemble image est un intervalle des nombres réels (ouvert ou fermé), un ensemble qui n'est pas dénombrable des nombres réels.

4 Fonction de la distribution de probabilités d'une variable discrète :

Si X est une variable aléatoire discrète son ensemble images :{ x_1 , x_2 , x_3. ...... , x_r } alors la fonction f définie par f (x_i) = p (x = x_i) pour tout i = 1 ;2 ;3 ; …………..

Détermine la distribution de probabilités d'une variable aléatoire discrète X qui représente l'ensemble des couples du graphe de f.

c'est-à-dire , la distribution de probabilité d'une variable aléatoire X = { (x_1 , f(x_1)) , (x_2 , f(x_2)) , (x_3 , f(x_3)) , ... , (x_n , f(x_n)) }

5 Espérance (moyenne) :

L'espérance est une valeur centrale des issues de la variable aléatoire par fois on l'appelle (moyenne) et notée (μ)

Si X est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble images de la fonction de la distribution de probabilité f : { x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n} consécutif, alors l'espérance est définie par la relation :

$$\text{L'espérance } (\mu) = \sum_{r=1}^{n} x_r \times f(x_r)$$

C'est – à – dire : l'espérance (μ) = $x_1 \times f(x_1) + x_2 \times f(x_2) + x_3 \times f(x_3) + \ldots + x_n \times f(x_n)$

6 Variance :

La variance d'une variable aléatoire discrète X mesure la dispersion des issues d'une variable aléatoire de leur espérance, notée (σ^2) et définie par la relation

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^{n} x_r^2 \times f(x_r) - \mu^2$$

écart-type d'une variable aléatoire x est la racine carrée de la variance, notée σ. On remarque que la variance et l'écart-type sont des valeurs positives

7 coefficient de variation :

Le coefficient de variation d'un ensemble des issues est le pourcentage de l'écart-type par rapport à l'espérance (moyenne) et défini par la relation

$$\textbf{coefficient de variation} = \frac{\textbf{L'écart-type}}{\textbf{Moyenne}} \times 100\ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$$

Ce coefficient représente la dispersion sous forme d'un pourcentage sans unité.

8 fonction de densité :

Pour tout variable aléatoire continue x, on peut associer une fonction réelle non négative noté f(x) appelé fonction de densité avec laquelle on peut calculer la probabilité des événements de la variable aléatoire en calculant l'aire de la région sous la courbe et au dessus de l'axe des abscisses. On calcule p $(a<x<b)$ en calculant l'aire de la région sous la courbe de la fonction entre les deux valeurs a et b .

La fonction vérifie les conditions suivantes :

- La valeur de la fonction f non négative.
- L'aire de la région sous la courbe de la fonction et au dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle de définition est égale à 1.

Exercices généraux

Premièrement : choisissiez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. L'espérance de la distribution de probabilité suivante est :

x_i	zéro	1	2
$f(x_i)$	0,2	0,3	0,5

a) 1 b) 1,14 c) 1,3 d) 1,5

2. Si l'espérance de la dispersion de probabilité suivante est égale à 2 :

x_i	1	2	k
$f(x_i)$	0,1	0,8	0,1

alors la valeur de k est égale à

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

3. Si X est une variable aléatoire continue, dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{où } -4 < x < 4 \\ \text{zéro} & \text{autrement} \end{cases}$$; alors k =

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) zéro d) 4

Deuxièmement : répondez aux questions suivantes

4. Si X est une variable aléatoire discrète dont les issues sont = { - 3 ; - 1 ; 0 ; 1 ; 3 } et $P(X = -3) = P(X = 3) = \frac{1}{9}$, $P(X = 0) = \frac{4}{9}$ et $p(X = -1) = p(X = 1)$. Trouvez la fonction de la distribution de probabilités de la variable aléatoire.

5. Si X est une variable aléatoire discrète dont la fonction de la distribution de probabilités est définie par $f(x) = \frac{x+4}{16}$ où x = - 2 ; m ; 1 ; 2 Déterminez la valeur de m puis écrivez la fonction de la distribution de probabilités de la variable X

6. Si X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilités est définie par la fonction $f(x) = \frac{a\,x^2}{2}$ où x = 0 ; 1 ; 2 ; 3

Déterminez la valeur de a puis déterminez $P(X \leqslant 2)$.

7. Si on lance un dé deux fois de suit et on note le nombre apparu sur la face supérieure. Déterminez la distribution de la variable aléatoire qui prend pour valeur « le plus grand des deux nombres apparus sur les faces supérieurs».

8 Un dé est fabriqué de sorte que deux faces portent le nombre 1, deux portent le nombre 3 et deux autres portent le nombre 5. On jette ce dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure chaque fois. Soit la variable aléatoire X «la différence absolue des deux nombres apparus »

Déterminez : Premièrement : la distribution de probabilité de la variable aléatoire X.

Deuxièmement : la probabilité que la différence absolue des deux nombres soit inférieure à 4 .

9 Les faces opposées du 1ère dé portent le même chiffre des 1 ; 3 ; 5. Les faces opposées d'un 2ème dé portent les chiffres 2 ; 4; 6 . On jette les deux dés à la fois et on note chaque fois le nombre apparu sue les faces supérieures. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme de deux nombres indiqués sur la face supérieure. Dresser le tableau donnant la lois de probabilité de X . puis calculez l'espérance et le coefficient de variation.

10 Deux boites A ; B contiennent chacune 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire aléatoirement une boule de chacune. Si X est la variable aléatoire qui prend paur valeur « la somme des deux nombres sur les boules tirées ». Déterminez la fonction de la distribution de probabilités de la variable X puis calculez la moyenne arithmétique et l'écart-type de la variable X.

11 Si X est la variable aléatoire de moyenne $\mu = 2$ dont la distribution de probabilité est comme ce qui suit :

x_r	1	0	2	a
$f(x_r)$	$\frac{1}{12}$	b	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

Premièrement : Calculaz les valeurs de a et b **deuxièmement** : calculez l'écart-type

12 Si X est une variable continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{16} & \text{si } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **Premièrement** : P (X < 2) **deuxièmement** : p (1 < X < 4)

13 Si X est une variable continue dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{8} & \text{si } a < x < a + 2 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez : **Premièrement** : la valeur de a **deuxièmement** : p (X < 3)

Pour avoir plus d'activités visitez le site www.sec3mathematics.com.eg

Epreuve cumulative

1. Dans le jeu de loterie partagé en 16 partie numérotées de 1 à 16. Quelle est la probabilité que l'aiguille s'arête sur un secteur portant un nombre impair sachant qu'il s'arête sur un secteur portant un nombre supérieur à 5 ?

2. Lien aux routes : Le tableau suivant indique la distribution de probabilité du nombre des accidants estimés pendant une journée pluvieuse sur une route .

Nombre d'accidants	zero	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,26	0,31	0,14	0,11	0,06	0,02

Calculez l'espérance du nombre d'accidant.

3. Lien du Média : Le tableau suivant représente les résultats déclarés d'un sondage fait par un site internet des programmes de télévision suivies par les téléspectateurs :

Nature du programme	Culturele	Sociale	nouvel	sportif	De loisir	Autre
Probabilité de réalisation	0,14	0,2	0,24	0,18	0,16	0,08

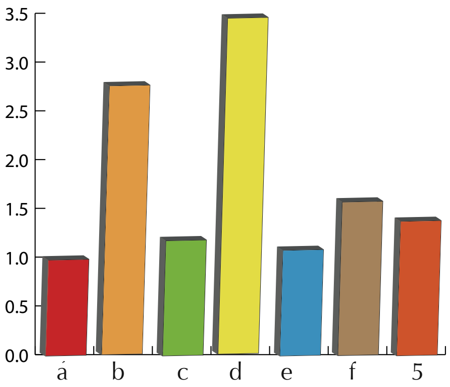
a) Représentez ces donnés par un diagramme en bâton

b) Démontrez que ses données représentent une distribution de probabilités

c) Si on choisit aléatoirement un téléspectateur, déterminez la probabilité qu'il suit les programmes sociaux et sportifs.

d) Ecrivez une recherche sur l'effet du média sur la culture sociale.

4. Lien au sport : 7 coureurs participent à un concours de distances courtes. La probabilité qu'un coureur gagne est représentée par le diagramme ci – contre :



a) Montrez que la distribution représente une distribution de probabilités.

b) Déterminez la probabilité que B ; A ; E gagne le concours.

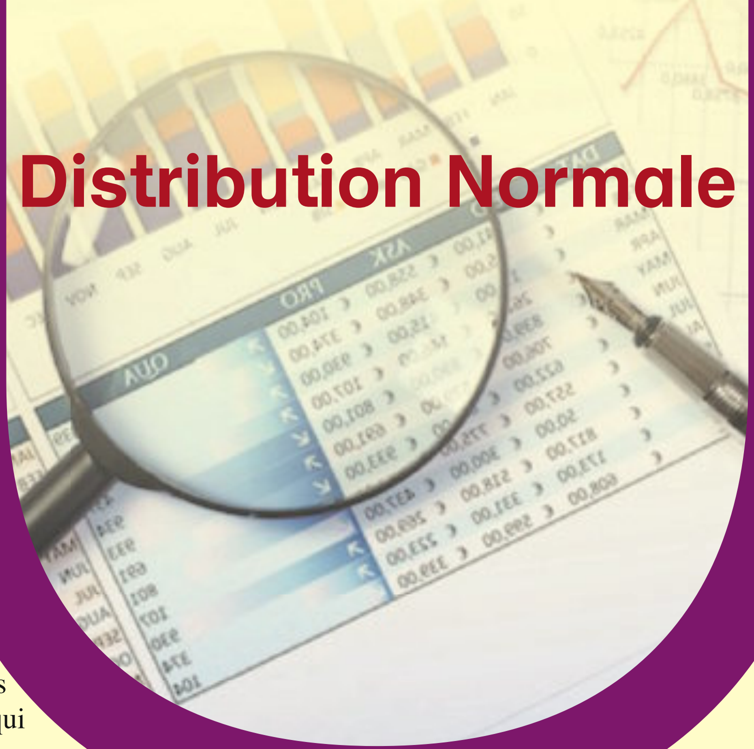
5. Si X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{12} & \text{si } 0 < x < 4 \\ \text{zero} & \text{autrement} \end{cases}$$

Déterminez : **premièrement** : P (X < 2) **deuxièmement :** P (2 < X < 5)

Unité
4

Distribution Normale



introduction

La loi normale est l’une des plus importantes distributions qui est enseignée dans les programmes de statistique grâce à ses différentes utilisations dans les productions de quelques opérations dans les sciences physiques, sociales et économiques où elle traite la plupart des phénomènes dans notre vie quotidienne. Le savant français Abraham de Moivre a été le premier qui a utilisé la distribution normale en 1756 dans l’une de ses publications, également d’autres scientifiques ont participé au développement de cette méthode parmi eux le savant allemand (Karl Friederich Gauss (1777-1855). Parfois on appelle la courbe normale par la courbe de Gauss.

Carl Friedrich Gauss

Abraham de Moivre

Parmi les plus célèbres applications de la distribution normale est l’évaluation administrative des subordonnés aussi elle est utilisée dans l’étude des reste pour analyser la regéssion, et a une relation avec le control de charts etc.

Objectifs de l’unité

A la fin de cette unité et après avoir exécuté les activités, l’élève doit être capable de :

- Connaitre la distribution normale et ses propriétés.
- Calculer la probabilité de la variable centré réduite
- Calculer la probabilité de la variable non réduite.
- Connaitre la variable aléatoire centré réduite et la courbe normale qui représente sa fonction de densité
- Transforme n’importe qu’elle variable aléatoire normale en variable aléatoire normale centré réduite.
- Trouver les valeurs de probabilité d’une variable aléatoire normale centré réduite à l’aide des tables
- Expliquer Propriétés de la courbe normale et quelques phénomènes qui les exprimés
- Expliquer les résultats obtenu du calcule la probabilité d’ une variable aléatoire normale

Vocabulaire de base

- Distribution normale
- Courbe normale
- Distribution normale centrée réduite
- variable aléatoire normale

Leçons de l’unité

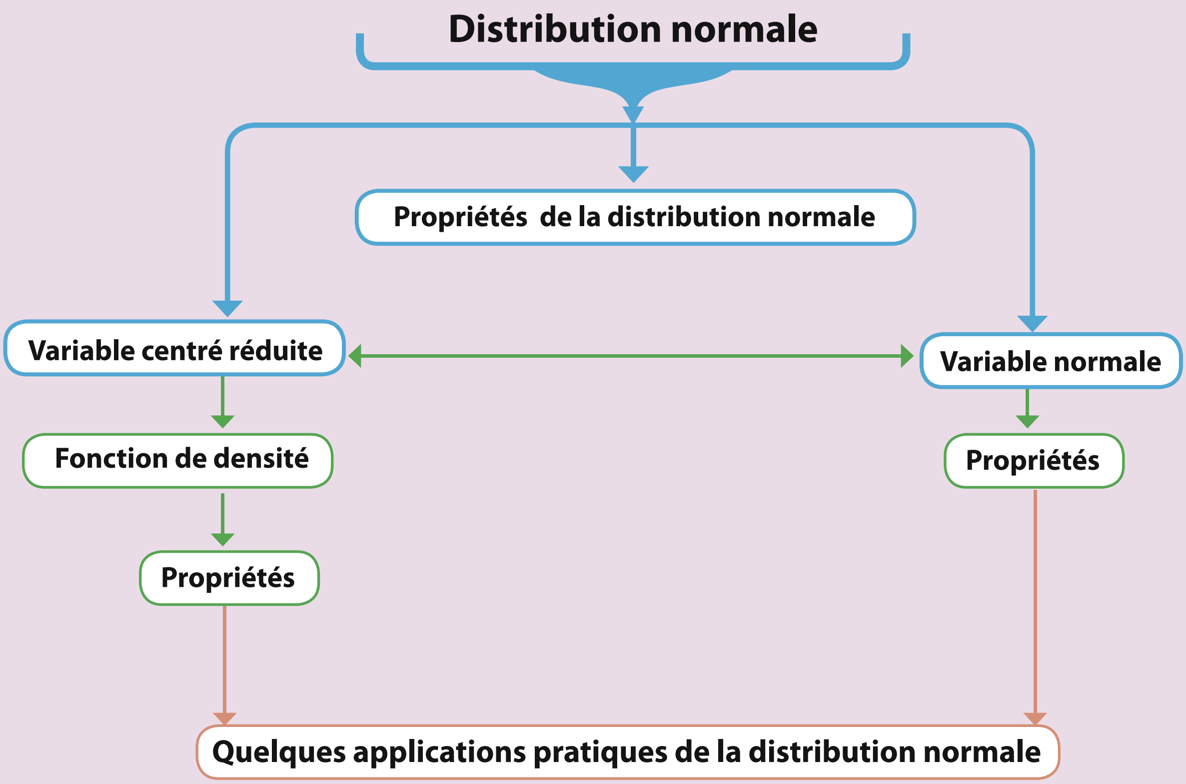
Leçon (4-1) Distribution normale

Leçon (4-2) Quelques applications pratiques de la distribution normale

Aide pédagogique

Calculatrice scientifique

Organigramme de l’unité



Unité 4

4 - 1 Distribution Normale

Allez apprendre

- Variable aléatoire normale
- Propriétés de la courbe normale
- Distribution norantmale centrée réduite
- Propriétés de la fonction de densité d'une distribution normale centrée réduite
- Calculer la probabilité de la variable centré réduite

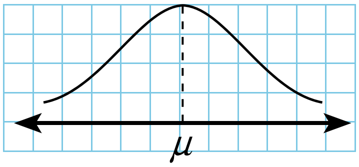
Vocabulaire de base

- Distribution normale
- Variable aléatoire normale centré réduite
- Courbe normale
- Distribution normale centré réduite

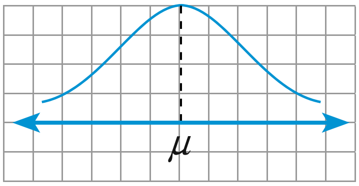
Introduction:

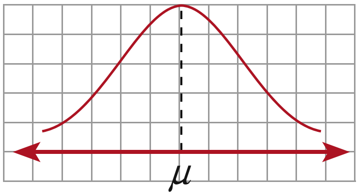
La lois normale est l'une des plus importes distribuions continue de l'importance de ses propriétés théoriques, ainsi que ses résultats sont des intervalles des nombres réelles, par exemples les tailles des adultes, les poids des enfants qui vient de nées, le dégrée de QI chez les jeans. ets. La distribution normale est comme une équation mathématique qui détermine ses direction et sera bien déterminer en connaissant l'espérance (moyenne) μ et l' écart-type σ . Cette courbe ressemble la cloche et elle est symétrique par rapporte à la droite d'équation x = μ et ses extrémités se rapprochent à l'axe des abscisses quand ses valeurs tands vers l'infinité.

Variable aléatoire normale:



Nous dirons qu'une variable aléatoire contenue X est une variable aléatoire normale si son ensemble image verifie les propriétés de la courbe normale]-∞ , ∞[et sa fonction de densité est représenté par une courbe en' cloche'. On appelle aussi cette courbe " courbe de Gauss". L'expression de cette fonction de densité dépend de deux paramètres ; la moyenne arithmétique μ et l'écart-type σ de la variable aléatoire X comme montrent les figures suivantes.





Propriétés de la courbe normale

(1) Elle a un seul sommet et ses extrémités se rapprochent vers - ∞ et ∞ .

(2) Elle a un axe de symétrie, passant par le sommet et coupe l'axe horizontal en X = μ .

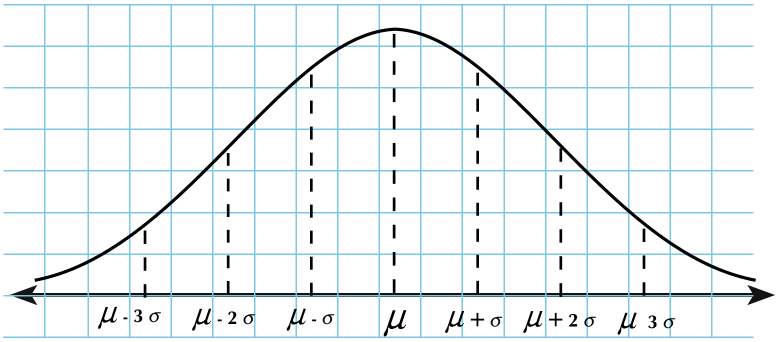
(3) L'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses est égale à l'unité

(4) A cause de la symétrie, la droite d'équation X = μ partage la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses en deux parties d'aires égale à 0 = 0.5.

(5) On peut Calculez l'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses d'après les intervalles suivantes

Aide pédagogique
- Calculatrice scientifique.

- De $\mu - \sigma$ à $\mu + \sigma$ = 68,26 % de l'aire totale.
- De $\mu - 2\sigma$ à $\mu + 2\sigma$ = 95,44 % de l'aire totale.
- De $\mu - 3\sigma$ à $\mu + 3\sigma$ = 99,74 % de l'aire totale.



Remarque que: Les effectifs doit être plus grand pour que la distribution normale soit admis

Exemple

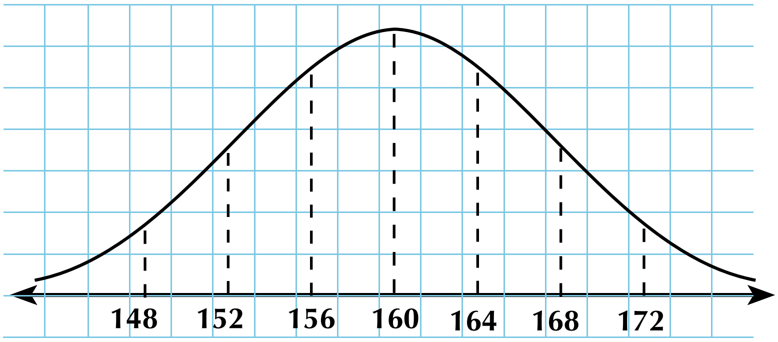
1 Si les tailles des élèves d'une école suivent une distribution normale de moyenne 160 cm, et d'écart-type 4 cm. Si on choisit au hasard un élève; Calculez la probabilité qu'il soit :

a plus grand que 172 cm

b plus petit que 156 cm

c compris entre 156 cm et 168 cm

Solution



On a de données : moyenne $\mu = 160$ écart-type $\sigma = 4$

En comparaison les données avec la courbe normale on trouve: $\mu + 3$ x = 160 + 3 × 4 alors,

a $P(x > 172) = P(x > \mu + 3\sigma)$

$\because$ L'aire de $\mu - 3\sigma$ à $\mu + 3\sigma = 0{,}9974$

$\therefore$ L'aire de μ à $\mu + 3\sigma = 0{,}9974 \div 2 = 0{,}4987$

$\therefore$ L'aire de à droite de $\mu + 3\sigma = 0{,}5 - 0{,}4987 = 0{,}0013$

b $P(x < 156) = P(x < \mu - \sigma)$

$\because$ L'aire de $\mu - \sigma$ à $\mu + \sigma = 0{,}6826$

$\therefore$ L'aire de μ to $\mu - \sigma = 0{,}6826 \div 2 = 0{,}3413$

$\therefore$ L'aire à gauche de $\mu - \sigma = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

c $P(156 < x < 168) = P(\mu - \sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(\mu - \sigma < x < \mu) + P(\mu < x < \mu + 2\sigma)$

$$= \frac{0,6816}{2} + \frac{0,9544}{2} = 0,3408 + 0,4772 = 0,818$$

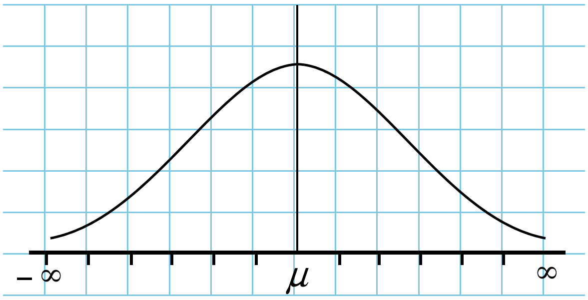
Essayez de résoudre

1 Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne $\mu = 68$ kg. et de variance 16 kg. Trouvez

a La probabilité que le poids soit plus grand que 72 kg

b Le pourcentage des étudiants dont leurs poids compris entre 64 kg. et 72 kg

c Le nombre des étudiants dont leurs poids plus grand que 64 kg. si le nombre des étudiants de la faculté est 2000 étudiants



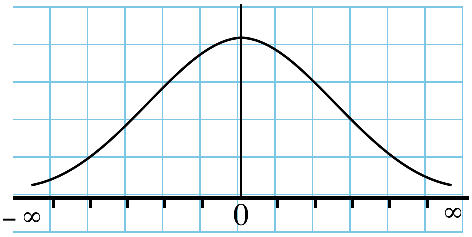
La distribution normale centrée réduite:

On a noté: pour calculer la probabilité de la distribution normale que les longueurs des intervalles sont multiples de l'écart-type pour qu'on puisse calculer la probabilité, pour ce-là on transforme les distributions normales en distributions normales centrées réduites, par transformé les valeurs de (x) en valeurs centrée réduites (y) en fonction de la moyenne μ et l'écart-type σ; et $\mu = 0$, $\sigma = 1$

Définition

Si X est une variable aléatoire normale de moyenne μ et l'écart-type σ, alors $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ est une distribution normale de moyenne μ = Zèro et l'écart-type $\sigma = 1$.

Propriétés de la fonction de densité de la distribution normale centrée réduite (y).



(1) La courbe est située au dessus de l'axe horizontal (axe des abscisses)

(2) Symétrique par rapport à l'axe vertical (axe des Ordonnées)

(3) Ses extrémités se prolongent à l'infini sans traversées l'axe horizontal

(4) L'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses = 1.

(5) De la symétrie, l'axe vertical partage cette région en deux parties d'aires égale à 0,5

(6) On peut calculer l'aire de la région limitée par la courbe et un intervalle]a , b[à l'aide des tables spéciales (Table des aires situées sous courbe normale, centrée réduite).

Table des aires situées sous une courbe normale, centrée réduite

Pour transformer une distribution normale X en distribution normale centrée réduite Y

On utilise la relation $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$, à l'aide de la table qui se trouve au livre on peut calculer l'aire demendée :

Dans ce qui suit on montre comment on cherche dans la table des aires situées sous une courbe normale, centrée réduite

y	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0						0,0199				
0,1										
0,2										
0,3										
0,4	0,1554									
0,5										
0,6				0,2357						
2,5								0,4949		
3,5										

P $(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}05)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle [0 ; 0,05] d'où y = 0,05 pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 0,0 et la colonne 0,05, on trouve le nombre 0,0199

$\therefore$ P $(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}05) = 0{,}0199$

P $(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}4)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle [0 ; 0,4] d'où y = 0,4 pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 0,4 et la colonne 0.00 on trouve le nombre 0,1554.

$\therefore$ P $(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}4) = 0{,}1554$

P $(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}63)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle [0 ; 0,63] d'où y = 0,63 pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 0.6 et la colonne 0,03 , on trouve le nombre 0,2357.

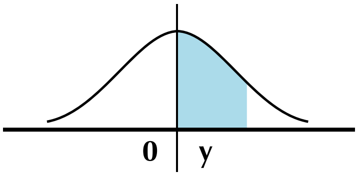
$\therefore$ P $(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}63) = 0{,}2357$

P $(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}57)$ = l'aire sous la courbe normale, centrée réduite dans l'intervalle [0 ; 2,57] d'où y = 2,57 pour ce là on cherche l'aire dans la ligne 2,5 et la colonne 0,07 on trouve le nombre 0,4949

$\therefore$ P $(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}57) = 0{,}4949$

Calcule de probabilités pour une variable aléatoire normale centrée réduite:

(1) Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [0 ; a] de la table



La table des aires situées sous la courbe normale, centrée réduite donne l'aire approchée de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [0 ; a] où $a \geqslant 0$, c'est-à-dire que la table donne directement $P(0 \leqslant Y \leqslant a)$

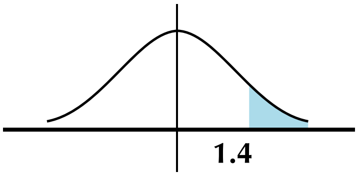
Par exemple: $P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}3) = 0{,}1179$, $P(0 < Y \leqslant 0{,}64) = 0{,}2389$

$P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}7) = 0{,}4554$, $P(0 \leqslant Y < 2{,}45) = 0{,}4929$

Remarque que: $P(Y \geqslant 1{,}4) = 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}4)$

$= 0{,}5 - 0{,}4192$

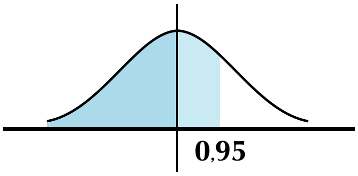
$= 0{,}0808$



De même: $P(Y \leqslant 0{,}95) = 0{,}5 + P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}95)$

$= 0{,}5 + 0{,}3289$

$= 0{,}8289$



(2) Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [- a , 0] de la table

De la symétrie de la courbe par rapport à l'axe verticale on trouve que:

$P(-a \leqslant Y \leqslant 0) = P(0 \leqslant Y \leqslant a)$

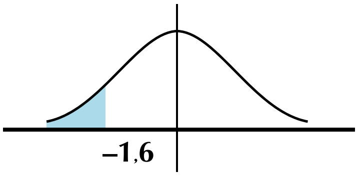
Par Exemple: $P(-1{,}25 \leqslant Y \leqslant 0) = P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}25) = 0{,}3944$

, $P(-2{,}24 \leqslant Y \leqslant 0) = P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}24) = 0{,}4875$

, $P(Y \leqslant -1{,}6) = 0{,}5 - P(-1{,}6 \leqslant Y \leqslant 0)$

$= 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}6)$

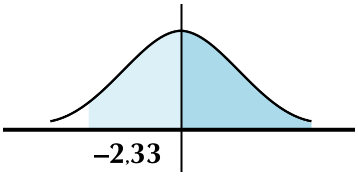
$= 0{,}5 - 0{,}4452 = 0{,}0548$



, $P(Y \geqslant -2{,}32) = 0{,}5 + P(-2{,}32 \leqslant Y \leqslant 0)$

$= 0{,}5 + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}32)$

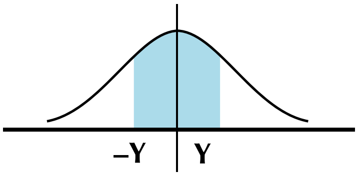
$= 0{,}5 + 0{,}4898 = 0{,}9898$



Remarque: $P(-y \leqslant Y \leqslant y) = 2 \times P(0 \leqslant Y \leqslant y)$

Par Exemple: $P(-1{,}4 \leqslant Y \leqslant 1{,}4) = 2 \times P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}4)$

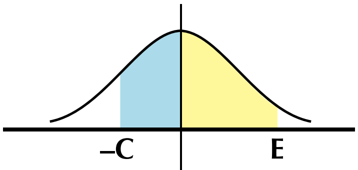
$= 2 \times 0{,}4192 = 0{,}8384$



, $P(-2{,}0 \leqslant Y \leqslant 2{,}0) = 2 \times P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}0) = 2 \times 0{,}4772 = 0{,}9544$

(3) Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale dans l'intervalle [C ; E]:

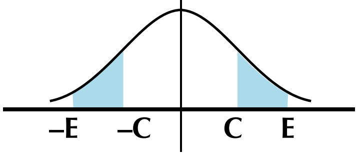
Dans ce cas on préfère d'utiliser le dessin de la courbe normale et on note de la symétrie que, l'axe vertical partage cette région en deux parties d'aires égale à 0,5



Premièrement: $P(-C \leqslant Y \leqslant E)$ si c et E sont positives.

$= P(-C \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant E)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant C) + P(0 \leqslant Y \leqslant E)$



Deuxièmement: $P(C \leqslant Y \leqslant E) = P(-E \leqslant Y \leqslant -C)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant E) - P(0 \leqslant Y \leqslant C)$

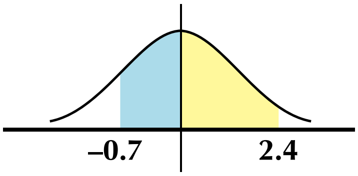
Par Exemple

(1) $P(-0,7 \leqslant Y \leqslant 2,4)$

$= P(-0,7 \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2,4)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 0,7) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2,4)$ de la symétrie

$= 0,2580 + 0,4918 = 0,7498$

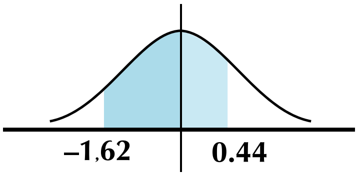


(2) $P(-1,62 < Y \leqslant 0,44)$

$= P(-1,62 < Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant 0,44)$

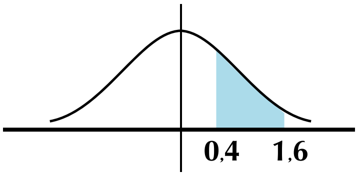
$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1,62) + P(0 \leqslant Y \leqslant 0,44)$ de la symétrie

$= 0,4474 + 0,1700 = 0,6174$



(3) $P(0,4 \leqslant Y < 1,6) = P(0 \leqslant Y < 1,6) - P(0 \leqslant Y \leqslant 0,4)$

$= 0,4452 - 0,1554 = 0,2898$

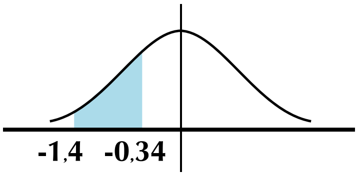


(4) $P(-1,4 < Y < -0,34)$

$= P(-1,4 < Y \leqslant 0) - P(-0,34 < Y \leqslant 0)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1,4) + P(0 \leqslant Y \leqslant 0,34)$ de la symétrie

$= 0,4192 - 0,1331 = 0,2861$



Exemple **Trouver l'aire de la région situées sous la courbe normale centrée réduite**

2 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez

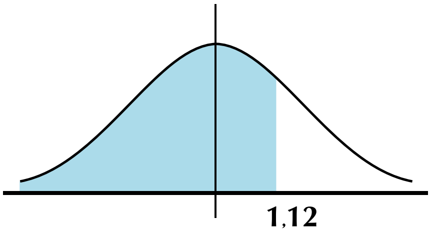
a $P(Y \leqslant 1,12)$ **b** $P(Y \geqslant 1,64)$ **c** $P(0,48 \leqslant Y \leqslant 2,1)$

Solution

a $P(Y \leqslant 1,12)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1,12) + P(Y \leqslant 0)$

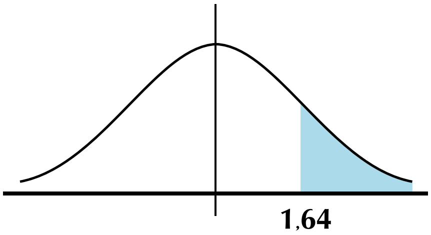
$= 0,3686 + 0,5 = 0,8686$



b $P(Y \geqslant 1{,}64)$

$= P(Y \geqslant 0) - P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}64)$

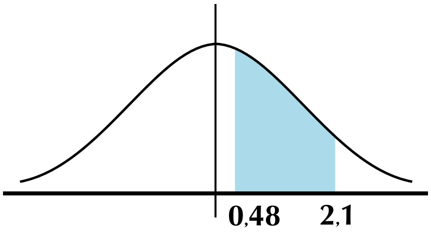
$= 0{,}5 - 0{,}4495 = 0{,}0505$



c $P(0{,}48 \leqslant Y \leqslant 2{,}1)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}1) - P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}48)$

$= 0{,}4821 - 0{,}1844 = 0{,}2977$



Essayez de résoudre

2 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez

a $P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}82)$ b $P(Y \geqslant 2{,}32)$

c $P(Y \leqslant 1{,}64)$ d $P(1{,}08 \leqslant Y \leqslant 3{,}12)$

Exemple

3 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez :

a $P(Y \leqslant - 0{,}56)$ b $P(Y \geqslant - 1{,}06)$

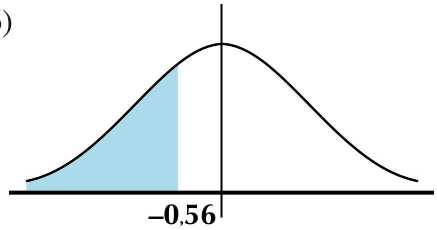
c $P(- 1{,}2 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$ d $P(- 2{,}2 \leqslant Y \leqslant - 0{,}46)$

Solution

a $P(Y \leqslant - 0{,}56)$

$= P(Y \geqslant 0{,}56)$

$= 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}56) = 0{,}5 - 0{,}2123 = 0{,}2877$

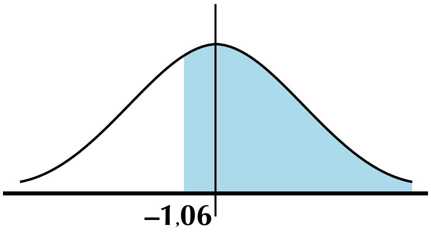


b $P(Y \geqslant - 1{,}06)$

$= P(Y \leqslant 1{,}06)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}06) + 0{,}5$

$= 0{,}0636 + 0{,}5 = 0{,}5636$

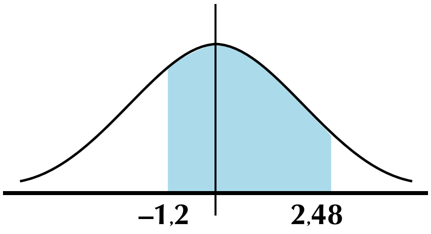


c $P(- 1{,}2 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$

$= P(- 1{,}2 \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}2) + P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$

$= 0{,}3849 + 0{,}4934 = 0{,}8783$

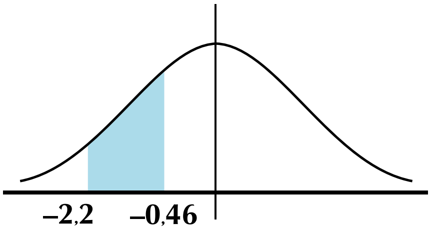


d $P(-2{,}2 \leqslant Y \leqslant -0{,}46)$

$= P(-2{,}2 \leqslant Y \leqslant 0) - P(-0{,}46 \leqslant Y \leqslant 0)$

$= P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}2) - P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}46)$

$= 0{,}4861 - 0{,}1772 = 0{,}3089$



Essayez de résoudre

3 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez

a $P(Y \leqslant -0{,}56)$ **b** $P(Y \geqslant -1{,}06)$

c $P(-1{,}2 \leqslant Y \leqslant 2{,}48)$ **d** $P(-2{,}2 \leqslant Y \leqslant -0{,}46)$

Exemple **Transformer d'une variable normale en variable normale centrée réduite :**

4 Soit X une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ, trouvez:

a $P(X > \mu - 1{,}5\sigma)$ **b** $P(X < \mu - 0{,}5\sigma)$

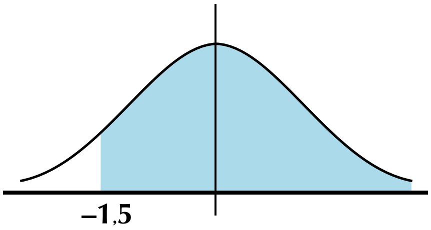
c $P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma)$

Solution

a $P(Y > \frac{\mu - 1{,}5\sigma - \mu}{\sigma}) = P(Y > -1{,}5)$

$= P(-1{,}5 < Y < 0) + 0{,}5$

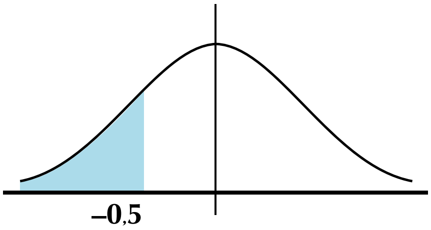
$= P(0 < Y < 1{,}5) + 0{,}5 = 0{,}4332 + 0{,}5 = 0{,}9332$



b $P(X < \mu - 0{,}5\sigma) = P(Y < \frac{\mu - 0{,}5\sigma - \mu}{\sigma})$

$= P(Y < -0{,}5) = P(Y > 0{,}5)$

$= 0{,}5 - P(0 < Y < 0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}1915 = 0{,}3085$

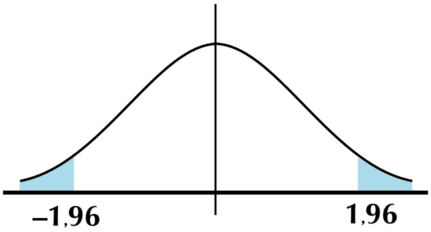


c $P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma)$

$= P(\frac{\mu - 1{,}96\sigma - \mu}{\sigma} < Y < \frac{\mu - 1{,}96\sigma - \mu}{\sigma})$

$= P(-1{,}96 < Y < 1{,}96)$

$= 2\ P(0 < Y < 1{,}96) = 2 \times 0{,}4750 = 0{,}95$



Essayez de résoudre

4 Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ, trouvez:

a $P(X < \mu - 2{,}1\sigma)$ **b** $(X > \mu + 0{,}8\sigma)$

c $P(\mu - 1{,}48\sigma < X < \mu + 1{,}48\sigma)$

Exemple

5 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez k dans les cas suivantes:

a $P(Y \geqslant K) = 0{,}1056$

b $P(Y \leqslant K) = 0{,}1151$

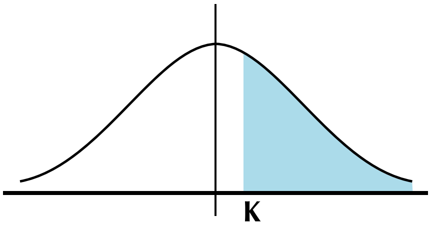
c $P(-0{,}44 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

d $P(K \leqslant Y \leqslant 2{,}1) = 0{,}2906$

Solution

a On remarque que l'aire:

L'aire < 0,5 et le signe de l'inéquation «plus grand que» alors k se trouve dans l'intervalle positif, comme indique la figure ci-contre.



$\because P(Y \geqslant K) = 0{,}1056$

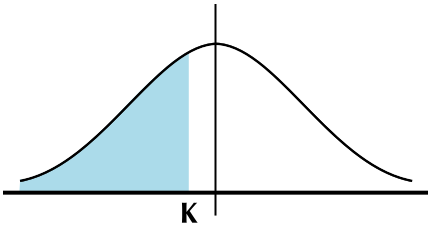
$\therefore 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}1056$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5 - 0{,}1056 = 0{,}3944$

On cherche d'un nombre (a) dans la table de l'aire qui est égale à l'aire 0,3944 on le trouve dans la ligne 1,2 et la colonne 0,05, c'est-à-dire **K = 1,25**

b On remarque que:

l'aire: < 0,5 , et le signe de l'inéquation ' plus petit que, alors k se trouve dans l'intervalle négatif, comme indique la figure ci-contre



$\because P(Y \leqslant K) = 0{,}1151$

De la symétrie on trouve que : $P(Y \geqslant K) = 0{,}1151$

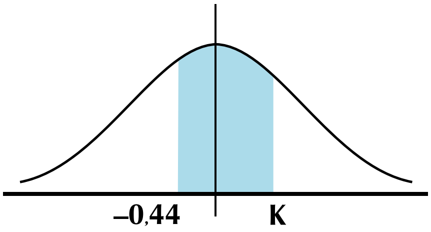
$\therefore 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}1151$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5 - 0{,}1151 = 0{,}3849$

$\therefore$ **K = - 1.2** (**Remarque que k se trouve dans la partie négatif**)

c On remarque que :

l'aire > 0.5 et l'une d'extrémités de l'inéquation se trouve dans l'intervalle négatif, alors k se trouve dans l'intervalle positif, comme indique la figure ci-contre



$\because P(-0{,}44 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

$\therefore P(-0{,}44 \leqslant Y \leqslant 0) + P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}44) + P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

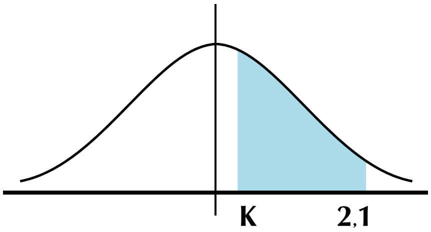
$\therefore 0{,}1700 + P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588 - 0{,}1700 = 0{,}3888$

$\therefore$ **K = 1,22**

d On remarque que :

l'aire < 0,5 et l'une d'extrémités de l'inéquation se trouve dans l'intervalle, positif, alors k se trouve dans l'intervalle positif, aussi comme indique la figure ci-contre:



$\because P(K \leqslant Y \leqslant 2{,}1) = 0{,}2906$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}1) - P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}2906$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant K) = P(0 \leqslant Y \leqslant 2{,}1) - 0{,}2906$

$= 0{,}4821 - 0{,}2906 = 0{,}1915$ $\therefore$ **K = 0,5**

Essayez de résoudre

5 Si y est une variable normale centrée réduite, trouvez k dans chacun des cas suivants

a $P(Y \geqslant K) = 0{,}1980$

b $P(Y \leqslant K) = 0{,}1980$

c $P(-2{,}4 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}7970$

d $P(K \leqslant Y \leqslant 2{,}5) = 0{,}8238$

Exemple

6 Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ

a Si: $P(X \geqslant 180)$	$= 0{,}0062$	, $\mu = 165$	Calculez σ
b Si: $P(X > 35)$	$= 0{,}8643$	, $\sigma = 5$	Calculez μ
c Si: $P(X \leqslant 170)$	$= 0{,}0228$	, $\sigma = 7$	Calculez μ
d Si: $P(X \leqslant K)$	$= 0{,}8944$	, $\mu = 125$, $\sigma = 8$	Calculez K
e Si: $P(X > K)$	$= 0{,}9452$	, $\mu = 50$, $\sigma = 5$	Calculez K

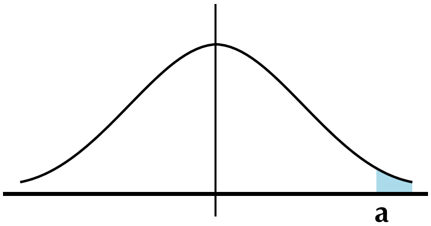
Solution

a $P(X \geqslant 180) = P\left(Y \geqslant \frac{180 - 165}{\sigma}\right) = 0{,}0062$

$\therefore P(Y \geqslant a) = 0{,}0062$ si $a = \frac{15}{\sigma}$, $a > 0$

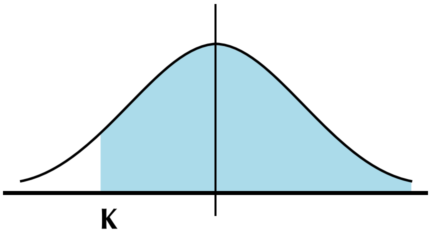
$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant a) = 0{,}5 - 0{,}0062 = 0{,}4938$

$\therefore a = 2{,}5$



$\therefore \frac{15}{\sigma} = \frac{5}{2}$ $\therefore \sigma = \frac{2 \times 15}{5}$ $\therefore$ **σ = 6**

b $P(X > 35) = P(Y > \frac{35 - \mu}{5}) = 0{,}8643$



$\therefore\ P(Y > K) = 0{,}8643$ si

$\therefore\ K = \frac{35 - \mu}{5}$, $K < 0$

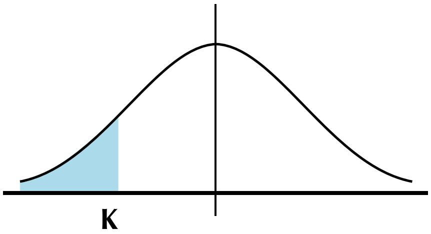
$\therefore\ P(0 \leqslant Y \leqslant -K) + 0{,}5 = 0{,}8643$

$P(-K < Y \leqslant 0) = 0{,}8643 - 0{,}5 = 0{,}3643$ $\therefore K = -1{,}1$

$\therefore \frac{35 - \mu}{5} = -1{,}1$ $\therefore 35 - \mu = -5{,}5$

$\therefore \mu = 35 + 5{,}5$ $\therefore$ **$\mu = 40{,}5$**

c $P(X \leqslant 170) = P(Y \leqslant \frac{170 - \mu}{7}) = 0{,}0228$



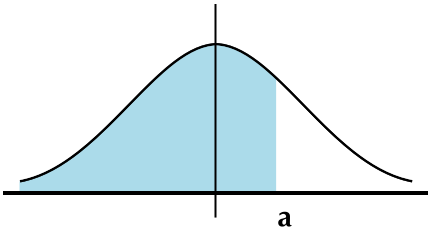
$\therefore P(Y \leqslant K) = 0{,}0228$ si $K = \frac{170 - \mu}{7}$, $K < 0$

$\therefore P(K \leqslant Y \leqslant 0) = 0{,}5 - 0{,}0228 = 0{,}4772$

$\therefore K = -2$

$\therefore \frac{170 - \mu}{7} = -2$ $\therefore 170 - \mu = -14$ $\therefore \mu = 170 + 14$ **$\mu = 184$**

d $P(X \leqslant K) = P(Y \leqslant \frac{K - 125}{8}) = 0{,}8944$



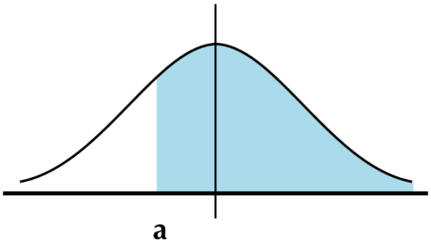
$\therefore P(Y \leqslant a) = 0{,}8944$

si $a = \frac{K - 125}{8}$, $a > 0$

$\therefore P(0 \leqslant Y \leqslant a) = 0{,}8944 - 0{,}5 = 0{,}3944$ $\therefore a = 1{,}25$

$\therefore \frac{K - 125}{8} = 1{,}25$ $\therefore K - 125 = 10$ $\therefore K = 125 + 10$ $\therefore K = 135$

e $P(X > K) = P(Y > \frac{K - 50}{5}) = 0{,}9452$



$\therefore P(Y > a) = 0{,}9452$

si $a = \frac{K - 50}{5}$, $a < 0$

$\therefore P(0 \leqslant Y < -a) = 0{,}9452 - 0{,}5 = 0{,}4452$ $\therefore a = -1{,}6$

$\therefore \frac{K - 50}{5} = -1{,}6$ $\therefore K - 50 = -8$ $\therefore K = 50 - 8$ **$K = 42$**

EssayeY de résoudre

6 Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ , et d'écart- type σ, $P(X < 19) = 0{,}7734$ et $P(X > 10) = 0{,}9332$, Calculez la valeur de μ et σ.

Exercices 4 - 1

1. Si y est une variable normale centrée réduite, Calculez:

- a $P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}15)$, $P(0 \geqslant Y \geqslant 2{,}42)$
- b $P(-0{,}04 \leqslant Y \leqslant 0)$, $P(-1{,}63 \leqslant Y \leqslant 0)$
- c $P(-0{,}7 \leqslant Y \leqslant 0{,}7)$, $P(-1{,}65 \leqslant Y \leqslant 1{,}65)$
- d $P(-2{,}42 \leqslant Y \leqslant 1{,}67)$, $P(-1{,}73 \leqslant Y \leqslant 0{,}64)$
- e $P(0{,}74 \leqslant Y \leqslant 1{,}02)$, $P(1{,}4 \leqslant Y \leqslant 2{,}2)$
- f $P(-2{,}1 \leqslant Y \leqslant -0{,}92)$, $P(-1{,}5 \leqslant Y \leqslant -0{,}84)$
- g $P(Y \leqslant 1{,}44)$, $P(Y \leqslant 2{,}05)$
- h $P(Y \leqslant -1{,}14)$, $P(Y \leqslant -2{,}32)$
- i $P(Y \leqslant 0{,}65)$, $P(Y \leqslant 1{,}42)$
- j $P(Y \leqslant -0{,}45)$, $P(Y \leqslant -1{,}6)$

2. Si Y est une variable normale centrée réduite, trouvez la valeur du nombre k qui vérifie:

- a $P(0 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}3554$
- b $P(K \leqslant Y \leqslant 0) = 0{,}4120$
- c $P(-K \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}2206$
- d $P(Y \leqslant K) = 0{,}9754$
- e $P(Y \leqslant K) = 0{,}1977$
- f $P(Y \geqslant K) = 0{,}0934$
- g $P(Y \geqslant K) = 0{,}9955$
- h $P(K \leqslant Y \leqslant 1{,}11) = 0{,}6660$
- i $P(K \leqslant Y \leqslant 2{,}22) = 0{,}2446$
- j $P(-1{,}7 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}3261$

3. Si Y est une variable normale centrée réduite, si on a:

- a $P(Y \leqslant K) = 0{,}1736$ Trouvez: $P(K \leqslant Y \leqslant 1{,}7)$
- b $P(Y \geqslant K) = 0{,}0207$ Trouvez: $P(0{,}56 \leqslant Y \leqslant K)$
- c $P(Y \leqslant K) = 0{,}8944$ Trouvez: $P(-0{,}7 \leqslant Y \leqslant K)$

d $P(0,4 \leqslant Y \leqslant K) = 0,3110$ Trouvez: $P(Y \leqslant K)$

e $P(1,4 \leqslant Y \leqslant K) = 0,0770$ Trouvez: $P(-1,4 \leqslant Y \leqslant K)$

f $P(K \leqslant Y \leqslant 1,7) = 0,8586$ Trouvez: $P(K \leqslant Y \leqslant 0,75)$

4 Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne arithmétique μ, et d'écart- type σ Si

a $P(X \leqslant 90) = 0,0668$, $\mu = 102$ Calculez σ

b $P(X \geqslant 62) = 0,0548$, $\mu = 50$ Calculez σ

c $P(X \geqslant 48) = 0,0228$, $\sigma = 4$ Calculez μ

d $P(X > 68) = 0,1056$, $\sigma = 6,4$ Calculez μ

e $P(X \geqslant 42) = 0,8944$, $\sigma = 6,4$ Calculez μ

f $P(\mu - K\sigma \leqslant x \leqslant \mu + K\sigma) = 0,438$ Calculez K

g $P(X \leqslant K) = 0,2119$, $\mu = 42$, $\sigma = 5$ Calculez K

h $P(X \leqslant K) = 0,8413$, $\mu = 72$, $\sigma = 8$ Calculez K

i $P(X > K) = 0,9772$, $\mu = 60$, $\sigma = 4$ Calculez K

5 Répondez aux questions suivants:

a Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne 120, d'écart- type 10 et $p(X < K) = 0,9599$, trouvez la valeur de k

b Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne μ, et d'écart- type $\sigma = 5$, trouvez la valeur de μ Si $p(X \leqslant 35) = 0,0228$

c Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 8$, et d'écart- type $\sigma = 2$ Si $P(K \geqslant X) = 0,1056$, trouvez:

Premièrement: La valeur de k **Deuxièmement**: $P(X \leqslant 10)$

d Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne μ et d'écart- type σ , trouvez $P(\mu - \frac{1}{4}\sigma \leqslant X \leqslant \mu + \frac{1}{2}\sigma)$

e Si Y est une variable centrée normale réduite, trouvez k qui vérifie

Premièrement: $P(Y > K) = 0,0281$

Deuxièmement: $P(-1 < Y < K) = 0,7918$

f Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne 18 et d'écart- type 2,5 , Trouvez

Premièrement: $P(X < 15)$

Deuxièmement: $P(17 < X < 21)$

g Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 24$ et d'écart- type $\sigma = 5$, trouvez:

Premièrement: $P(X \geqslant 32.5)$

Deuxièmement: $P(14 < X < 29)$

h Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 48$ et d'écart- type $\sigma = 5$, trouvez:

Premièrement: $P(43 < X < 59)$

Deuxièmement: la valeur de K Si $P(x > K) = 0{,}1841$.

i Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 17$ et 17et d'écart- type $\sigma = 2$, trouvez:

Premièrement: $P(16 \leqslant X \leqslant 20)$

Deuxièmement: $P(X > 15)$

j Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne 32 et de variance 16 . Trouvez:

Premièrement: $P(X < 25)$

Deuxièmement: $P(28 < X < 35)$

k Soit X une variable aléatoire normale, de moyenne $\mu = 8$ et d'écart- type $\sigma = 2$, trouvez:

Premièrement: $P(X \leqslant 10)$

Deuxièmement: Si $P(X \geqslant K) = 0.1056$, trouvez La valeur de k.

Unité 4

4 - 2 Quelques applications pratiques de la distribution normale

Allez apprendre

- Application pratiques de la distribution normale

Vocabulaire de base

- Distribution normale
- Variable aléatoire normale
- Courbe normale
- Distribution normale centrée réduite

Introduction:

Dans la leçon précédente, nous avons appris la distribution normale et ses propriétés et nous avons appris la variable aléatoire normale centrée réduite et comment le calculer de la distribution normale connaissant la moyenne et d'écart- type, nous avons appris comment calculer de probabilités pour une variable aléatoire normale centrée réduite en utilisant la table des aires. Dans cette leçon on apprendera quelques déférentes utilisations de la variable aléatoire normale pour étudier quelques Phénomènes.

Exemple

En lien avec l'industriel

1) Une machine dans une usine produit des cylindres dont les longueurs suivent une distribution normale de moyenne 56 cm et d'écart- type 2 cm. Un cylindre est accepté si sa longueur est comprise entre 51 cm et 60 cm. On choisit au hasard une chantions de 1000 cylindres. Combien le nombre estimé de cylindres acceptés ?

Solution

Soit X une variable aléatoire normale qui représente les longueurs de cylindre,

$\therefore$ La probabilité que le cylindre est accepté = P $(51 < X < 60)$

$= P\left(\frac{51 - 56}{2} < y < \frac{60 - 56}{2}\right)$

$= P(-2{,}5 < y < 2)$

$= P(-2{,}5 < y \leqslant 0) + P(0 \leqslant y < 2)$

$= 0.4938 + 0.4772 = 0.9710$

$\therefore$ Le nombre estimé des cylindre acceptés = $1000 \times 0.9710 = 971$ cylindres

Essayez de résoudre

1) En lien avec le revenu: Si le revenu mensuel d'un groupe de 200 ouvriers d'une usine suit une distribution normale de moyenne 175 L.E. et d'écart-type 10 L.E., trouvez le nombre des ouvriers dont le revenu est compris entre 170 L.E.et 180 L.E.

Aide pédagogique
- Calculatrice scientifque.

Exemple

2 En lien avec l'enseignement: Si les notes des élèves d'une école suit une distribution normale de moyenne $\mu = 44$ et d'écart-type σ, Sachant que 22.66% des élèves ont obtenu des notes supérieures à 50. Trouvez σ.

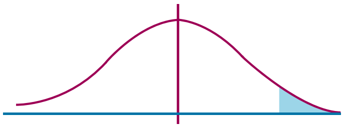
Solution

Soit X une variable aléatoire normale qui représente les notes des élèves

$\therefore P(X > 50) = \frac{22,26}{100}$

$\therefore P(y > \frac{50 - 44}{\sigma}) = 0.2266$

$\therefore P(y > K) = 0,2266$ si $K = \frac{6}{\sigma}$, $K > 0$



$\therefore P(0 \leqslant y < K) = 0,5 - 0,2266 = 0,2734$

$\therefore K = 0,75$ $\therefore \frac{6}{\sigma} = 0,75$ $\therefore \sigma = \frac{6}{0,75} = 8$

Essayez de résoudre

2 Si les notes des élèves à un examen suivent une distribution normale de moyenne 60 et d'écart-type 12. On choisit au hasard un élève, calculez la probabilité que sa note soit compris entre 66 et 75, si 15% des meilleurs élèves ont obtenu la mention excellente. Trouvez la plus petite note permet d'obtenir la mention excellente

Exemple

3 En lien avec la taille: Les tailles des élèves d'un Lycée suivent une distribution normale de moyenne 160 cm et d'écart-type $\sigma = 5$ cm, Déterminez la probabilité que la différence de la taille d'un élève de μ ne dépasse pas 8 cm.

Solution

Soit X une variable aléatoire normale qui représente les tailles des élèves, La différence de la taille d'un élève à $\mu = | x - \mu |$" c'est-à-dire la différence absolue de la taille et μ "

$\therefore P(|X - \mu| < 8) = P(|X - 160| < 8)$

$\therefore P(-8 < X - 160 < 8)$

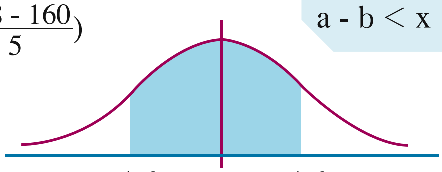
$= P(152 < X < 168)$

$= P(\frac{152 - 160}{5} < y < \frac{168 - 160}{5})$

$= P(-1,6 < y < 1,6)$

$= 2 \times P(0 \leqslant y < 1,6)$

$= 2 \times 0,4452 = 0,8904$



Rappelle

L'expression:

$|x - a| < b$

équivalant à

L'expression:

$-b < x - a < b$

D'où

$a - b < x < a+b$

Essayez de résoudre

3 **En lien avec le poids:** Si les poids des élèves d'une école primaire suivent une distribution normale de moyenne 30 kg et d'écart-type 5 kg , calculez le pourcentage d'élèves dont le poids dépasse 45 kg et le pourcentage d'élèves dont le poids est compris entre 25 kg et 35 kg.

Exemple

4 **En lien avec le travail:** Si les salaires des ouvriers d'une usine suivent une distribution normale de moyenne μ = 75 LE et d'écart-type σ = 10, Calculez:

a le pourcentage des ouvriers dont les salaires dépasse 90 LE.

b le pourcentage des ouvriers dont les salaires inférieur à 55 L.E

c le pourcentage des ouvriers dont les salaires est compris entre 60 et 80 L.E.

Solution

a $\because P(X > 90) = P(Y > \frac{90 - 75}{10})$

$= 0{,}5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668$

$\therefore$ le pourcentage des ouvriers dont les salaires dépasse 90 LE = 6,68%

b $\because P(X < 55) \quad = P(y < \frac{55 - 75}{10}) \quad = P(Y < -2)$

$= 0.5 - P(0 \leqslant Y \leqslant 2) \quad = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$

$\therefore$ le pourcentage des ouvriers dont les salaires inférieur 55 LE = 2,28% du nombre total

c $\because P(60 \leqslant X \leqslant 80) \quad = P(\frac{60 - 75}{10} \leqslant Y \leqslant \frac{80 - 75}{10})$

$= P(-1{,}5 \leqslant Y \leqslant 0{,}5) = P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}5) +$

$P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}5) = 0{,}1915 + 0{,}4332 = 0{,}6247$

$\therefore$ le pourcentage des ouvriers dont les salaires est compris entre 60 LE et 80 LE = 62,47% du nombre totale des ouvriers de l'usine.

Essayez de résoudre

4 Soient les notes des élèves d'un examen suivent une distribution normale de moyenne 76 et d'écart-type 15. Si 15% des éléves sont des meilleurs et obtient des notes plus grand que α , et 10% des élèves sont des mouvais éléves et obtient des notes plus petit que β : Trouvez

a le plus petite valeur des α pour qu'un élève soit de meilleur élèves

b La valeur de β pour que un élève soit de mouvais élèves

Exercices 4 - 2

1) Si le revenu mensuel de 1000 familles dans une ville suit une distribution normale de moyenne 170 L.E. et d'écart-type 20 L.E. On choisit une famille au hasard, trouvez :

a) La probabilité pour que son revenu soit compris entre 160 L.E.et 200 L.E

b) Le nombre des familles dont le revenu dépasse 150 L.E

2) Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 68,5 kg et d'écart-type 2,5 kg

a) Calculez le pourcentage des étudiants dont le poids est compris entre 67,5 kg et 71 kg

b) Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont le poids dépasse 71 kg

3) On choisit un échantillon de 200 élèves d'une école, si leurs âges suivent une distribution normale de moyenne 16,6 et d'écart-type 1,2 Trouvez le nombre des élèves dont leurs âges est inférieur à 16 ans.

4) Les tailles de 2000 étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 170 cm et d'écart-type 8 cm , trouvez le nombre des étudiants dont la taille est inférieur à 176 cm

5) Si le revenu mensuel de 300 familles représente une variable aléatoire X qui suit une distribution normale de moyenne $\mu = 500$ LE et d'écart-type σ = 20 L.E, trouvez

a) Le nombre des familles dont le revenu dépasse 530 L.E

b) Le revenu maximal de 4% des familles dont les petits revenus.

6) Si le revenu mensuel de 200 familles représente une variable aléatoire X qui suit une distribution normale de moyenne $\mu = 400$,et écart-type $\sigma = 80$ LE, trouvez:

a) La probabilité pour que le revenu mensuel d'une famille soit 500 L.E au plus.

b) Le nombre des familles dont le revenu mensuel est 500 L.E. au plus

7) Si le temps de fonctionnement (par heurs) pour une sorte de batterie suit une distribution normale de moyenne 2000 h. et d'écart-type 120 h L.E. Quelle est la probabilité pour qu'une batterie fonctionne plus que 1800 h

8 Si le revenu mensuel de 500 ouvriers suit une distribution normale de moyenne 180 L.E. et d'écart-type 15 L.E. Trouvez le nombre des ouvriers dont le revenu mensuel est inférieure que 198 L.E

9 Si la hauteur de l'eau de pluie pendant le mois de février suit une distribution normale de moyenne $\mu = 3$ cm et de variance $\sigma^2 = 4$ cm^2, Trouvez la probabilité pour que la hauteur de l'eau de pluie pendant le mois de février l'année prochaine soit:

a Plus grand que 1 cm

b compris ente 3,5 cm et 4 cm

10 Si les températures pendant le mois d'août suit une distribution normale de moyenne $\mu = 35$ degrés et d'écart-type $\sigma = 5$ degrés, Trouvez la probabilité pour que la température pendant un jour de ce mois soit :

a Comprise entre 28 et 38 degrés.

b plus grande que 39 degrés .

c Comprise entre 26 degrés et 32 degrés.

11 1000 jeune hommes ont présenté au département de recrutement, leurs tailles suivent une distribution normale de moyenne 170 cm et d'écart-type 10cm , Trouvez le nombre des jeunes hommes

a dont la taille est inférieure à 190 cm

b Qui sont refusées, sachant que la taille minimale pour accepter est 155 cm

12 Si les longueurs d'une certainne sorte de plantes suivent une distribution normale de moyenne 50 cm et d'écart-type σ Si les longueurs de 10.56% de cette plante sont plus petit que 45 cm, Calculez la variance de longueurs de cette plante.

13 Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 65 kg et d'écart-type σ . Si les poids de 33% des étudiants dépasse 70 kg.

a Calculez σ

b Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont le poids sont Inférieure à 67,5 kg

14 Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 68,5 kg et d'écart-type 2,5 kg .

a Calculez le pourcentage des étudiants dont les poids compris entre 67,5 kg et 71 kg

b Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont le poids sont supérieure à 71 kg

15 Si les notes des élèves d'une école suit une distribution normale de moyenne $\mu = 42$ et d'écart-type σ Sachant que 26.11% des élèves ont obtenu des notes supérieures à 50 Trouvez σ.

16 Si les notes dans l'examen de mathématiques suivent une distribution normale de moyenne 70 et d'écart-type 5. Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont les notes sont supérieures à 78.

17 Une usine produit des cylindres dont les longueurs suivent une distribution normale de moyenne 56 cm et d'écart- type 2 cm. Un cylindre est accepté si sa longueur est comprise entre 51 cm et 60 cm. On choisit au hasard une échantillon de1000 cylindres. Déterminez le nombre estimé de cylindres d'acceptés ?

18 Si les rayons des spirales produites par une usine suivent une distribution normale de moyenne 25 cm et d'écart- type 20 cm. Une spirale est défectueuse si son rayon est inférieur à 20 cm ou supérieure à 28 cm, On choisit au hasard une spirale. Quelle est la probabilité qu'elle est défectueuse.

19 Si les poids des animaux expérimentaux suivent une distribution normale de moyenne μ gm et d'écart- type 10 gm ; Si $P(x \geqslant 180) = 0,1587$, Calculez la moyenne μ

20 Si les notes des étudiants dans un examen suivent une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ, Calculez :

a la probabilité d'obtenir une note plus grand que $(\mu - \sigma)$.

b le pourcentage d'obtenir une note compris entre : $(\mu - 2\sigma)$ et $(\mu + 2\sigma)$.

21 Si les longueurs d'une certainne sorte de plants suivent une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type 4 Si les longueurs de 10.56% de cette plante sont plus petit que 45 cm, Calculez la moyenne μ de cette plante.

22 Si les températures pendant le mois de Janvier suit une distribution normale de moyenne 16° et d'écart-type 4° Trouvez la probabilité pour que la température pendant un jour de ce mois soit :

a Compris entre 14° et 20°

b plus grand que 15°

23 Dans l'une des communautés on a trouvé que le QI suivent une distribution normale de moyenne 104.6 et d'écart-type 6.25 . Calculez :

a le pourcentage de personnes dont le QI est compris entre 90 et 120

b le pourcentage de personnes dont le QI dépasse 110

Résumé de l'unité

Variable aléatoire normale

La variable aléatoire normale continue X: son ensemble image est déterminé par l'intervalle]-∞ , ∞[et son fonction de densité est représentée par une courbe ' en cloche' et son expression dépend de deux valeurs qui sont la moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ.

Propriétés de la courbe normale

1 Elle a un seul sommet et ses extrémités se rapprochent vers - ∞ , ∞ .

2 Elle a un axe de symétrie, passant par le sommet et coupe l'axe horizontal en $X = \mu$.

3 L'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses est égale à l'unité.

4 A cause de la symétrie, la droite d'équation $X = \mu$ partage cette région en deux parties d'aires égale à 0,5

5 On peut calculer l'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses d'après les intervalles suivantes:

- De $\mu - \sigma$ à $\mu + \sigma$ = 68.26 % de l'aire totale .
- De $\mu - 2\sigma$ à $\mu + 2\sigma$ = 95,44 % de l'aire totale .
- De $\mu - 3\sigma$ à $\mu + 3\sigma$ = 99,74 % de l'aire totale .

La distribution aléatoire normale

Si la distribution de la variable aléatoire X est la distribution normale de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ , alors .$Y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ est une distribution normale centré réduite dont l'espérance est 0 et son écart- type = 1.

Propriétés de la fonction de densité de la distribution normale centrée réduite :

1 La courbe est située au dessus à l'axe horizontal (axe des abscisses).

2 Symétrique par rapport à l'axe vertical (axe des Ordonnées) .

3 Ses extrémités se prolongent à l'infini sans traversées l'axe horizontal

4 L'aire de la région limitée par la courbe et l'axe des abscisses = 1

5 De la symétrie, l'axe vertical partage cette région en deux parties d'aires égale à 0,5

6 On peut calculer l'aire de la région limitée par la courbe et un intervalle [a , b] l'aide de des tables spéciales.

Table des aires situées sous une courbe normale, centrée réduite:

Pour transformer une distribution normale X en distribution normale centrée réduite Y :

On utilise la relation $Y = \frac{x - \mu}{\sigma}$, à l'aide de la table qui se trouve au livre on peut calculer l'aire demandée

Exercices généraux

1 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ, Démontrez que $P(x \geqslant \mu + 2\sigma) = 0{,}0228$

2 Si X est une variable aléatoire normale de moyenne arithmétique μ, et de variance 64, trouvez μ si $P(x < 70) = 0{,}17$

3 Trouvez σ si $P(x < 37.25) = 0{,}0446$ et $\mu = 50$

4 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique $\mu = 16$ et d'écart- type $\sigma = 4$, Calculez :

a $P(x \leqslant 19)$ **b** $P(9 \leqslant x \leqslant 20)$ **c** $P(x \geqslant 10)$

5 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ, et d'écart- type σ, et si $P(x < 19) = 0{,}7734$ et $P(x > 10) = 0{,}9332$, trouvez μ et σ.

6 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ, trouvez la valeur de μ et σ si :

a $P(\mu - 2\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 2\sigma)$

b $P(\mu - 1{,}35\sigma \leqslant x \leqslant \mu - 0{,}7\sigma)$

7 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ et si:

a $P(x > 45) = 0{,}0228$, $\sigma = 10$ trouvez μ

b $P(x \geqslant 15) = 0{,}8413$, $\sigma = 5$ trouvez μ

c $P(x < 55) = 0{,}3085$, $\mu = 60$ trouvez σ

8 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne μ 50 et d'écart- type 10 trouvez:

a $P(x > 70)$ **b** la valeur de k si $P(x < K) = 0{,}1587$

9 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne $\mu = 100$ et d'écart- type $\sigma = 4$

a Si $P(x > a) = 0{,}5636$ trouvez la valeur de a

b Trouvez $P(x < 90)$

c Trouvez $P(x > 108)$

d Trouvez $P(95 < x < 105)$

10 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne μ et d'écart- type $\sigma = 8$ et si $P(x \leqslant 40) = 0{,}1587$, trouvez :

a La moyenne **b** $P(x > 50)$

11 Si Y est une variable aléatoire normale centré réduite et si:

a $P(Y > K) = 0{,}1056$ Trouvez la valeur de k

b $P(-0{,}44 \leqslant Y \leqslant K) = 0{,}5588$ Trouvez la valeur de k

12 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne μ et d'écart- type σ, trouvez:

a $P(x > \mu)$

b $P(x < \mu)$

c $P(\mu - \sigma \leqslant x \leqslant \mu + \sigma)$

d $P(x > \mu + 2\sigma)$

e $P(\mu - \sigma \leqslant x \leqslant \mu + 2\sigma)$

f $P(\mu - 0{,}5\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 0{,}5\sigma)$

13 Si X est une variable aléatoire normale. de moyenne et d'écart- type σ et $a > 0$, Trouvez la valeur de a si

a $P(\mu - a\sigma \leqslant x \leqslant \mu + a\sigma) = 0{,}6476$

b $P(\mu - a\sigma \leqslant x \leqslant \mu + a\sigma) = 2\,P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}48)$

14 Si X est une variable aléatoire normale de moyenne 75 et d'écart- type 15, trouvez la valeur de k . Si $P(x > K) = 0{,}15$

15 Si X est une variable aléatoire normale de moyenne μ et d'écart- type 5, trouvez μ Si $P(x \leqslant 45)$ égale à

a 0,0228

b 0,9332

16 En lien avec la météo: Si les températures pendant un mois suivent une distribution normale de moyenne 20° et d'écart-type 3,5° Trouvez la probabilité pour que la température soit compris entre 21° et 25°

17 En lien avec le revenu: Si le revenu quotidien de 1000 ouvriers suit une distribution normale de moyenne 400 L.E. et d'écart-type 80 L.E. On choisis au hasard un ouvrier trouvez :

a la probabilité pour que son revenu soit inférieure à 240 L.E.

b le pourcentage pour que son revenu soit supérieure à 300 L.E.

c le nombre d'ouvriers dont le revenu compris entre 260 L.E et 340 L.E.

18 En lien avec les salaires: Si les salaires d'un groupe de 500 ouvriers suivent une distribution normale de moyenne 60 et d'écart-type 12 . Calculez le nombre d'ouvriers :

a dont les salaires ne dépasse pas 54.

b dont les salaires n'est pas inférieur à 81.

19 Si les notes des étudiants dans un examen suivent une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ, Calculez :

a la probabilité d'obtenir une note plus grand que $(\mu - \sigma)$

b le pourcentage d'obtenir une note compris entre $(\mu - 2\sigma)$ et $(\mu + 2\sigma)$.

Pour avoir plus d'activités visitez le site www.sec3mathematics.com.eg

Epreuve cumulé

1 Une boite contient 15 boules, dont 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 ; 10 boules noires numérotées de 6 à 15, On tire au hasard une boule de la boite

Premierément : Calculez la probabilité de chacune de deux évènements suivants:

A La boules tirée soit rouge ou porte un nombre impair.

B La boules tirée soit noire et porte un nombre pair

Deuxiémement : Est -ce que A et B sont incompatibles vérifiez votre réponse.

2 Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité f(x) tel que :

$$f(x) = \begin{cases} K\,(2x-1) \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{Zèro} \quad \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez :

a la valeur de k

b $P(X \geqslant 2)$

3 Dans une étude de la relation entre le revenu mensuelle (X) et l'économie mensuelles (Y) en L.E. d'un échantillon de 20 familles ; ce qui nous donne les informations suivantes :

$\Sigma X = 3000$ $\quad \Sigma Y = 300$ $\quad \Sigma X^2 = 800000$

$\Sigma Y^2 = 5500$ $\quad \Sigma XY = 60000$

a Calculez le coefficient de corrélation linéaire entre le revenu mensuelle et l'économie d'une famille.

b L'équation de la droite de régression .

c Estimez la somme économisée par mois d'une famille dont le revenu est 2000 L.E

4 Soit X est une variable aléatoire discrète. Si

$$f(x) = \frac{x^2 + K}{18} \qquad \text{si } x = -1\ ,0,\ 2,\ 3$$

a Calculez la valeur de k pour que f(x) être une fonction de densité de probabilité

b Calculez la moyenne de la variable X

c Trouvez $P(X \leqslant 2)$.

5 Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire tel que :

$P(A) = \frac{1}{2}$, $\quad P(B) = x \quad$ et $\quad P(A \cup B)' = \frac{1}{3}$

Premièrement: Trouvez la valeur de x dans les cas suivants :

a A et B sont incompatibles .

b $A \subset B$

Deuxièmement: Si $x = \frac{1}{4}$ trouvez $P(A \cap B)$.

6 **En lien avec la taille :** Les tailles d'un group des élèves suivent une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type 8 cm, Déterminez la valeur de μ si la taille centré réduite d'un élève de 180 cm de long est 1,25

7 **En lien avec la production :** Si X et Y sont deux variables représentent la production (X) et les salaires des ouvriers (Y) en mille L.E. d'une Entreprise et on donne les informations suivantes

la production	1000	2000	2500	4000	2300	2500
les salaires	150	200	150	700	180	200

Calculer le coefficient de corrélation des rangs entre la production et les salaires

8 **Lier avec les incitations:** Si les incitations des ouvrières d'une usine suivent une distribution normale de moyenne $\mu = 75$ LE, L.E. et d'écart-type $\sigma = 10$, trouvez le pourcentage des ouvrières dont :

a les incitations dépassent 90 LE.

b les incitations plus petites que 55 LE.

c les incitations compris entre 60 LE et 80 LE.

9 Si les températures pendant le mois de Janvier suit une distribution normale de moyenne 16° et d'écart-type 4° Trouvez la probabilité pour que la température pendant un jour de ce mois soit

a Compris entre 14° et 20°

b plus grand que 15°

10 **économie d'énergie :** Dans une usine pour la production de lampes à économie d'énergie observé que l'âge des lampes produites (en jours) suit une distribution normale de moyenne μ, et d'écart-type 20 jours et que 4,95 % des lampes produites leurs l'âge est plus petit que 100 jour.

a Trouvez μ

b Parmi 10000 lampes des lampes produites. Estimez le nombre des lampes dont leur âge est compris entre 100 et 150 jours

Epreuve 1

Il est permis d'utiliser une calculatrice et la table des aires:

Première question :

(a) Complétez les phrases suivantes:

1. Si A et B sont deux événements de l'espace des éventualités E d'une expérience aléatoire tel que $P(B') = 0.6$,

   alors $P(A' \cap B) + P(A) \times P(B \mid A) =$ ....

2. Si y est une variable normale centrée réduite, tel que $P(K \leqslant Y \leqslant 1,5) = 0,03$ alors K = ...

3. Si A et B sont deux événements indépendants de l'espace des éventualités E d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,8$ alors $P(A - B) =$ ....

4. Soit X est une variable aléatoire discrète de moyenne 5 , $\Sigma\ x_i^2 \times f(x_i) = 34$ alors l'écart-type est égale à ....

5. Si l'équation de la droite de régression de y en x est $y = 0,2\ x + 3$; l'espérance de y est 4,6 quand x = 5, alors l'erreur dans la valeur de y est égalé à..................................

(b) Si A et B sont deux événements tel que $P(A) = 0,6$, $P(A' \cap B) = 0,2$, $P(A \cap B) = 0,3$ Calculez:

a $P(B \mid A)$ b $P(A' \mid B')$

Deuxième question:

(a) Le tableau suivant donne les mentions de 6 étudiants en mathématiques (x) et statistiques (y). Calculezr le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y en précisant sa nature

x	Excellent	Passable	Bien	Passable	Très Bien	Très Bien
y	Très Bien	Passable	Passable	Bien	Bien	Excellent

(b) Soit X une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ = 10 et d'écart-type σ = 2,5

1. Déterminer $P(X \leqslant 12,5)$
2. Si $P(X \geqslant K) = 0,1056$, Trouvez la valeur de k .

Troisième question:

(a)Soit X une variable aléatoire continue et

$$f(x)= \begin{cases} \dfrac{x-1}{8} & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

1. Démontrez que f(x) est une fonction de densité de probabilité
2. Calculezr P (2 < x < 3)

(b) **Si le revenu mensuel de 1000 familles dans une ville suit une distribution normale de moyenne 1700 L.E. et d'écart-type 200 L.E. On choisit une famille au hasard, trouvez le nombre des familles dont le revenu dépasse 1500 L.E.**

Quatrième question:

(a) **Soit X une variable aléatoire discrète son ensemble image est { -2; -1 ; 0 ; 1; 2} Si $P(X = r) = \frac{a+r}{15}$ pour tout r appartenant à l'ensemble image de X. Calculezz la valeur de a et l'écart-type de X**

(b) **Si : $\Sigma x = 49$, $\Sigma y = 45$, $\Sigma x^2 = 359$, $\Sigma y^2 = 303$, $\Sigma x\, y = 320$, n = 7**

1. Calculez le coefficient de corrélation de Pearson entre x et y et déterminer sa nature
2. Estimer la valeur de y si x = 9 en utilisant une droite de régression convenable.

Epreuve 2

Il est permis d'utiliser une calculatrice et la table des aires

Première question

(a) **Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées**

1. Si on jette un dé une fois alors la probabilité d'obtenir le nombre 5 sachant que le nombre apparu est impair =

   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{3}{4}$

2. Si A et B sont deux événements et $P(A \cap B) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}4$; alors $P(A \mid B)$=

   a 0,5 b 0,06 c 0,14 d 0,1

3. La valeur de k dans la distribution suivante est :

$f(x)_r$	3	5	8
x_r	k^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

4. Les notes d'une classe dans l'examen de statistique suivent une distribution normale de moyenne 76 et d'écart-type 5 . Si la note d'Ahmed dans cet examen est 66 ; alors sa note centrée réduite est

   a 3 b -2 c 1 d 2

5. le coefficient qui représente une relation forte entre deux variables est

   a -0,58 b 0,48 c 0,68 d -0,78

6. Une boîte contient 9 boules identiques numérotées de 0 à 8. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre sans remise, Calculez la probabilité pour que

1. Les deux nombres soient pairs.
2. Le premier nombre soit impair et le deuxième soit pair

Deuxième question :

(a) A l'aide de tableau suivant :

x	150	180	150	120	120	100
y	120	120	100	80	80	100

Calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y

(b) Si la distribution de la variable aléatoire discrète X donnée par le tableau suivant:

x_r	1	2	4	6
$f(x_r)$	0,2	a	0,4	0,1

Calculez la valeur de a puis la moyenne et l'écart-type de la variable X.

Troisième question:

(a) Les salairs mensuel d'un groupe d'employés d'une Enterprise suivent une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ = 250 L.E Si le pourcentage d'employés dont le salair dépasse 2150 L.E. est 97,72%, Trouvez μ .

(b) Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x + K) & \text{Si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

1. Trouvez la valeur de K
2. Calculez $P(X < 3)$

Quatrième question :

(a) Si $\Sigma x = 40$, $\Sigma y = 30$, $\Sigma x^2 = 360$, $\Sigma y^2 = 200$, $\Sigma x\,y = 232$, $n = 5$ trouvez :

1. Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y.
2. L'équation de la droite de régression de y en x, puis estimer la valeur de y si x= 9

(b) Si Y est une variable aléatoire centrée réduite, trouvez la valeur de K Si : $P(Y \geqslant K) = 0{,}1170$

Epreuve 3

Première question:

(a) Complétez les phrases suivantes :

1. Si $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ alors $P(A' \mid B')$ = ...

2. Soit X est une variable aléatoire son ensemble image est {0; 1; 2; 3; 4}
Si $P(X = 0) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$, $P(X = 1) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$ alors $P(X = 2)$ = ...

3. Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \ , \ -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

alors a = ...

4. Si A et B are sont deux événements indépendants , P(A) = 0,3, P (B) = 0,6 P (A ∪ B) = x, alors x = ...

5. Les tailles d'un groupe des 1000 personnes suit une distribution normale de moyenne $176\frac{1}{2}$ et d'écart-type 5 alors le nombre de personnes dont la taille est supérieure à 185cm = ...

6. Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire. Démontrez que :
$P(B) = P(A) \times P(B \mid A) + P(A') \times P(B \mid A')$, puis l'utilise pour calculez P (B)
sachant que P (A) = 0,6 , P (B | A') = 0,8 , P(B | A) = 0,3

Deuxième question:

(a) Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 1}{24} & , \ 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculez:

1. $P(3 \leqslant X \leqslant 5)$
2. $P(X \leqslant 4)$

(b) Calculezr le coefficient de corrélation des rangs de Spearman entre x et y de donnés du tableau suivant:

x	10	16	15	17	18
y	5	7	8	6	9

Troisième question:

(a) Soit X est une variable aléatoire discrète est définie par la fonction f telle que
$f(x) = \frac{x}{10}$, $x \in \{1; 2; 3; K\}$ trouvez :

1. k , puis dressez le tableau donnant la loi de probabilité de la variable x.
2. l'espérance et la variance de la variable aléatoire X

(b) Soit X une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique $\mu = 50$, d'écart- type σ Trouvez σ Si $P(X \leqslant 37{,}25) = 0{,}0446$

Quatrième question:

(a) Pour étudier la relation entre le nombre d'articles demandé (y) en kg et le prix (x) en Livres Égyptienne on a les informations suivantes :
$\Sigma x = 25$, $\Sigma y = 30$, $\Sigma xy = 181$,
$\Sigma x^2 = 155$, $\Sigma y^2 = 249$, $n = 5$ trouvez:

1. Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y
2. Le coefficient de régression de nombre d'articles demandé par rapport au prix

(b) Si $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$, $P(B \mid A') = \frac{5}{8}$, $P(A) = \frac{3}{4}$ Calculez $P(A \cup B)$

Epreuve 4

Première question:

(a) Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Une boîte contient 15 lampes parmi eux 5 défectueuse, si on tire au hasard deux lampes l'une après l'autre sans remise, alors la probabilité pour que les deux lampes soient défectueuse est :

   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{2}{21}$

2. Si A et B sont deux événements dans l' univers (U) d'une expérience aléatoire et $A \subset B$ alors $P(B \mid A)$ est égale à

   a) P(A) b) P(B) c) P(A -B) d) P (U)

3. Si tous les points de le nuage sont situés sur une droite alors le coefficient de corrélation entre les deux variables peut être égale à

   a) -1 b) zéro c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

(4) La valeur de k dans la distribution suivante est

x_i	−2	−1	1	2
$f(x_i)$	3 k	$\frac{1}{4}$	2 k	$\frac{1}{3}$

a $\frac{5}{7}$ b 1 c $\frac{1}{12}$ d $\frac{1}{3}$

(5) Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{Zèro} & \quad \text{autrement} \end{cases}$$

alors P (X < 2) = ...

a $\frac{2}{3}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{3}{4}$ d 1

(b) Si A et B sont deux événements dans l' univers d'une expérience aléatoire , $P(A') = \frac{1}{4}$, $P(B' \mid A) = \frac{2}{5}$, Calculez $P(A \cap B)$

Deuxième question:

(a) Soit X est une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0,25	0,2	0,1	0,3	0,15

Trouvez la moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire X.

(b) On jette un dé deux fois de suite et on note le nombre qui apparaît sur la face supérieure. Calculez la probabilité des événements suivants

(1) La somme de deux nombres est plus grande que 8

(2) La différence absolue de deux nombre plus petit que 2, sachant que leur somme est plus grand que 8

Troisième question:

(a) Le tableau suivant montre les mentions de six étudiants en physiques et mathématiques

mentions de physiques	Passable	Bien	Excellent	Faible	Très Bien	Bien
mentions de mathématiques	Passable	Très Bien	Très Bien	Passable	Excellent	Faible

Calculezr le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, en précisant sa nature.

(b) Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,(x + a) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculez la valeur de a puis Calculez $P\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right)$

Quatrième question:

(a) La moyenne arithmétique d'une variable est égale à 150 et son coefficient de variation est égal à 2%, Calculez la variance.

(b) Pour étudier la relation entre le poids X en kg et la taille y en cm pour six personnes on a
$\Sigma x = 374$, $\Sigma y = 913$, $\Sigma x^2 = 24364$,
$\Sigma y^2 = 193624$, $\Sigma xy = 52260$ trouvez:

1. Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y
2. L'équation de la droite de régression de y en x.

Epreuve 5

Première question:

(a) Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si P(A') = 0,3 , P(B) = 0,4 , P (A ∩ B) = 0,2 Calculezz P (A | B') =

   a $\frac{1}{2}$ b $\frac{5}{6}$ c 1 d $\frac{3}{4}$

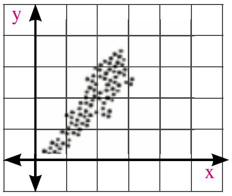
2. Le coefficient qui représente une relation forte entre deux variables est :

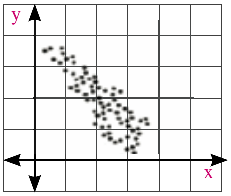
   a -0,2 b 0,1 c -0,8 d 0,7

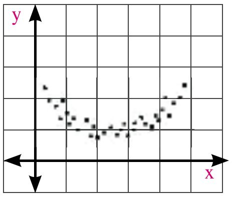
3. Soit X est une variable aléatoire son ensemble image est { 1; 2; 3; 5} , et $P(x = 1) = 2\,P(x = 2) = \frac{1}{4}$, $P(x = 3) = \frac{7}{16}$ alors P (x = 5) =

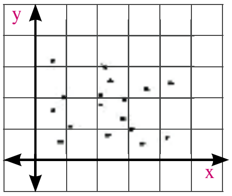
   a $\frac{3}{8}$ b $\frac{3}{16}$ c $\frac{3}{4}$ d $\frac{11}{16}$

4. Le nuage de dispérsion qui représente une corrélation directe est

   a 

   b 

   c 

   d 

5. Si dans une relation entre deux variables x et y $\Sigma X_i \cdot f(x_i) = 4$, $\Sigma x_i^2 \cdot f(x_i) = 25$ alors le coefficient de variation est égale à

   a 16% b 75% c 64% d 15,6%

(b) Si A et B sont deux événements indépendants dans l'univers d'une expérience aléatoire, P (A) = 2P(B) = x , P (A ∪ B) =$\frac{7}{9}$ trouvez la valeur de x.

Deuxième question:

(a) Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32}(x+4) \text{ si } & -K \leqslant x \leqslant K \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez:

(1) la valeur de K (2) P (x ⩽ 0) (3) P (-2 ⩽ x ⩽ 2)

(b) Le tableau suivant montre les mentions de huit étudiants dans une faculté en mathématiques et en physiques :

mentions de mathématiques(X)	Excellent	Bien	Très Bien	Très Bien	Faible	Excellent	Passable	Très Bien
mentions de physiques (Y)	Très Bien	Très Bien	Bien	Excellent	Passable	Excellent	Passable	Excellent

Calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, en précisant sa nature.

Troisième question:

(4) Si les poids des étudiants d'une faculté suivent une distribution normale de moyenne 55 kg et d'écart-type σ Si les poids de 33 % des étudiants dépasse 66 kg.

(1) Calculez l'écart-type

(2) Si le nombre des étudiants est 1000, Calculez le nombre des étudiants dont les poids sont Plus grand que 66 kg

(b) Soit X est une variable aléatoire discrète de moyenne $\mu = 3$ et sa distribution de probabilité est:

x_i	Zèro	K	3	4
$f(x_i)$	m	$\frac{1}{6}$	4m	5m

Trouvez:

(1) m et k

(2) l'écart-type et le coefficient de variation .

Quatrième question:

(a) Une boîte contient cinq cartes idéntiques numérotées de 1 à 5. On tire au hasard deux cartes l'une après l'autre avec remise, Calculez la probabilité pour que:

1. La somme de deux nombres soit un nombre premier
2. Le produit de deux nombres est plus petit que 7 sachant que leur somme est un nombre premier

(b) Dans une étude de la relation entre deux variables X et Y on a

$n = 10$, $\Sigma x = 35$, $\Sigma y = 60$, $\Sigma x y = 187$

$\Sigma x^2 = 134$, $\Sigma y^2 = 406$ trouvez :

1. Le coefficient de la droite de régression de x en y.
2. Calculez le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y puis détermine sa nature.

Epreuve 6

Première question:

(a) Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Le coefficient qui représente une relation forte entre deux variables est :

   a) 0,7 b) 1,2 c) -0,9 d) -0,3

2. Soit X est une variable aléatoire don l'ensemble image est {1; 2; 3} alors la relation qui représente une fonction de la distribution de probabilité est :

   a) $f(x) = \frac{x+2}{8}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{3}$ c) $f(x) = \frac{x}{6}$ d) $f(x) = \frac{2x+3}{6}$

3. Si on jette un dé une fois ; alors la probabilité d'apparaître un nombre impaire sachant que le nombre apparu est inférieure à 4:

   a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

4. Si A et B sont deux événements indépendants, P(A) = 0,5, P(B) = 0,6 alors $P(A \cup B) =$

   a) 0,3 b) 1,1 c) 0,8 d) 0,1

5. Soit X une variable aléatoire normale. de moyenne $\mu = 6$ et d'écart- type $\sigma = 3$ alors la variable qui représente une distribution normale centré réduite est:

   a) $\frac{6-X}{3}$ b) $\frac{X-3}{6}$ c) $\frac{X-6}{3}$ d) $\frac{3-X}{6}$

(b) **Si A et B sont deux événements dans l' univers d'une expérience aléatoire, $P(A') = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$, $P(A \cup B) = 0{,}9$ Calculez $P(A \mid B')$**

Deuxième question:

(a) **Le tableau suivant montre les mentions de six étudiants en mathématiques (X) et statistiques (Y) :**

x	Bien	Très Bien	Faible	Excellent	Passable	Faible
y	Passable	Faible	Bien	Passable	Très Bien	Excellent

Calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, en précisant sa nature.

(b) **Soit X une variable aléatoire continue**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x+2) \text{ si } & -2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Premièrement: Démontrez que f(x) est une fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X:

Deuxièmement: Calculez $P(0 \leqslant x \leqslant 2)$

Troisième question:

(a) **Soit X une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique μ et d'écart- type σ Calculez :**

1. $P(\mu \leqslant x \leqslant \mu + \sigma)$
2. $P(\mu - \frac{7}{4}\sigma \leqslant x \leqslant \mu + \frac{7}{4}\sigma)$
3. $P(x - \mu \leqslant 1{,}8\sigma)$

(b) **Soit X est une variable aléatoire discrète sa distribution de probabilité est :**

x_i	–1	0	1	2	4
$f(x_i)$	2k	k	3k	2k	k

Trouvez la valeur de k puis Calculez la moyenne et la variance de la variable aléatoire X.

Quatrième question:

Si on a:

$\Sigma x = 540$, $\Sigma y = 460$, $\Sigma x^2 = 37112$

$\Sigma y^2 = 28252$, $\Sigma xy = 30782$, $n = 8$

Premièrement: Calculez le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y

Deuxièmement: Estimez la valeur de y si x= 30 en utilisant une équation convenable de la droite de régression

Epreuve 7

Première question:

(a) Complétez les phrases suivantes :

1. Si les deux points (6;5) et (3;8) sont situés sur la droite de régression de y en x, alors la nature de corrélation entre X et Y est ....

2. Soit X est une variable aléatoire son ensemble image est { -1; 0; K} ,et sa fonction de distribution de probabilité est $f(x) = \frac{x+2}{4}$ alors K = ...

3. Si $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$, $P(A') = \frac{1}{4}$ alors $P(B \mid A)$ = ...

4. Si A et B sont deux événements indépendants, P(A) = 0,4 , $P(A \cup B) = 0{,}58$ alors P (B) = ...

5. Si X est une variable normale, de moyenne $\mu = 4$ et de variance = 25 alors $P(x \geqslant 14)$ = ...

(b) Si X est une variable normale, de moyenne $\mu = 55$ et d'écart- type σ , Trouvez la variance ; telle que $P(x \leqslant 45) = 0{,}228$.

Deuxième question:

(a) Soit X est une variable aléatoire discrète son ensemble image est { -3; -2; 1; 2} , $P(x = -3) = P(x = -2) = \frac{1}{8}$, $P(x = 2) = \frac{1}{2}$, Calculez:

Premièrement: P(x = 1)

Deuxièmement: L'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

(b) Le tableau suivant montre les mentions de six étudiants en mathématiques (X) et chimie (Y):

mentions de mathématiques	Très Bien	Faible	Passable	Bien	Excellent	Passable
mentions de chimie	Passable	Bien	Très Bien	Passable	Faible	Excellent

Calculez le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, en précisant sa nature.

Troisième question:

(a) Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x + K & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez la valeur de k ; puis Calculez $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$

(b) Si la probabilité qu'il pleuve est 0,24 et la probabilité que l'atmosphère soit orageuse est 0,36 et la probabilité qu'il pleuve et qu'il soit orageuse est 0,14. Calculez les probabilités suivantes :

Premièrement: qu'il pleuve ou qu'il soit orageux.
Deuxièmement: qu'il pleuve sachant qu'il soit non orageux.

Quatrième question:

(a) **Dans une étude entre la relation entre les deux variables X et Y on a :**
$\Sigma x = 477$, $\Sigma y = 222$, $\Sigma x y = 15184$, $\Sigma x^2 = 32593$, $n = 7$
Trouvez l' équation de la droite de régression de y en x puis estimez la valeur de y quand x = 100

(b) **Si X est une variable normale, de moyenne μ, et d'écart- type $\sigma = 8$, et si $P(x > 64) = 0{,}0668$ Calculez μ.**

Epreuve 8

Première question:

(a) **Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées**

1. Si l'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 0.2\,x + 3$; alors la valeur de y quand x = 5 est :

   a) 0,2 b) 3,2 c) 3 d) 4

2. Si X est une variable aléatoire et l'espérance = 3 , $\Sigma x_r^2 \cdot f(x_r) = 14{,}5$ alors l'écart- type est égale à:

   a) 11,5 b) 5,5 c) 4,8 d) 2,35

3. Si $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A - B) = \frac{3}{8}$ alors $P(B' \mid A) =$

   a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{32}$ d) $\frac{3}{16}$

4. Si A et B sont deux événements indépendants et , P(A) = 0,6, P(B) = 0,3 alors P (B - A) =

   a) 0,9 b) 0,3 c) 0,18 d) 0,12

5. Si Y est une variable normale réduite, tel que: $P(Y \geqslant 1{,}5) =$ .... à deux décimales près :

   a) 2,23 b) 1,51 c) 0,07 d) 1,21

(b) **Si on jette deux dés distancts une fois ; alors calculez la probabilité que la somme des deux nombres est impaire sachant que le nombre apparu sur le premier dé est 4**

Deuxième question:

(a) **Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est :**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(2\,x + 1) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculez: **Premièrement**: $P(x \leqslant 2)$ **Deuxièmement**: $P(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

(b) Le tableau suivant montre les notes de six étudiants en statistiques et mathématiques

Note de statistiques	22	25	19	24	25	13
Note de mathématiques	45	35	40	28	40	25

Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, entre les notes de statistiques et mathématiques en précisant sa nature.

Troisième question :

(a) Si les notes des étudiants dans l'examen de mathématique suit une distribution normale de moyenne 70 et d'écart-type 5 . Calculez le nombre des étudiants dont leur notes sont supérieur à 78 Si le nombre des étudiants été 10000.

(b) Soit X est une variable aléatoire discrète sa distribution de probabilité de est :

x_r	-2	-1	0	3	4
$f(x_r)$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}a$	$\frac{3}{8}$

Trouvez la valeur de a puis calculez la moyenne et la variance de la variable aléatoire x.

Quatrième question:

(a) Dans une étude entre la relation entre les deux variables x et y, on a:

$n = 7$, $\Sigma x = 147$, $\Sigma y = 99$, $\Sigma x\,y = 2123$, $\Sigma x^2 = 3430$

1. Trouvez l'équation de la droite de régression de y en x
2. Estimez la valeur de y quand $x = 20$

(b) Si A et B sont deux événements indépendants et $P(A) = 0{,}6$, $P(A - B) = 0{,}36$ Calculez $P(A \cup B)$

Epreuve 9

Première question:

(a) Complétez les phrases suivantes:

1. Si $P(A') = \frac{2}{5}$ et $P(B|A) = \frac{1}{2}$ alors $P(A \cap B) =$ ....
2. Si la distribution de la variable aléatoire X est:

x_r	-1	0	2
$f(x_r)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Alors l'espérance = ...

③ Si A et B sont deux événements indépendants tel que , $P(B') = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$ alors $P(A) =$ ....

④ Dans l'équation de la droite de régression de y en x est : $y = bx + a$. si le coefficient de x est inférieure à zéro, alors la corrélation entre les variables X et Y est ....

⑤ Si X est une variables aléatoire de moyenne 75 et d'écart-type 4, alors $P(X < 85) =$ ....

(b) Une classe de 42 élèves dont 28 étudie l'anglais, 21 étudie l'Italie et 7 étudie les deux langues, On choisit au hasard un élève. Calculez la probabilité que cette élève étudie:

Premièrement: deux langues

Deuxièmement: l'anglais sachant qu'il étudie l'Italie

Deuxième question:

(a) A l'aide du tableau suivant

x	9	12	11	14	10	12
y	15	20	19	23	17	18

Premièrement: Calculer le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre x et y. en précisant sa nature.

Deuxièmement: En utilisant une équation de la droite de régression convenable estimez la valeur de y puis calculez le pourcentage d'erreur quand $x = 11$

(b) Si A et B sont deux événements dans l'univers d'une expérience aléatoire $P(B' | A) = 0{,}4$, $P(A | B) = 0{,}3$ et $P(A) + P(B) = 0{,}36$ Calculez P(A) et $P(A \cup B)$

Troisième question:

(a) Soit X une variable aléatoire continue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 5 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Premièrement: Démontrez que f(x) est une fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X

Deuxièmement: Calculez $P(x > 4)$

(b) Soit X une variable aléatoire normale. de moyenne arithmétique $\mu = 15$ et d'écart- type $\sigma = 5$, trouvez:

① $P(12 < x < 17)$

② la valeur de K, si $P(X < K) = 0{,}3446$

Quatrième question:

(a) Soit X est une variable aléatoire discrète son ensemble image est { 0; 1; 3; 5}, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(x = 1) = \frac{1}{6}$ et $P(x = 3) = \frac{1}{4}$ trouvez:

Premièrement: La distribution de variable x

Deuxièmement: La moyenne et le coefficient de variation de la variable aléatoire X

(b) Une boîte contient 7 boules blanches ; 8 boules rouges ; 5 boules noires. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre sans remise, calculez la probabilité pour que :

Premièrement: La deuxième boule est blanche sachant que la première est blanche.

Deuxièmement: La première boule est rouge et la deuxième est rouge.

Epreuve 10

Première question:

(a) Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Soit X est une variable aléatoire discrète son ensemble image est {0; 1; 2; 3} et $P(x = 0) = \frac{1}{8}$ et $P(x = 2) = \frac{1}{2}$ $P(x = 3) = \frac{1}{4}$ alors $P(x = 1)$ ....

   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{8}$ c $\frac{1}{2}$ d 1

2. Si $P(A - B) = 0{,}04$, $P(A \cap B) = 0{,}1$ alors $P(B' \mid A) =$ ....

   a 0,3 b 0,5 c 0,04 d 0,8

3. Si A et B sont deux événements incompatibles , $P(A) = 0{,}3$ et $P(B') = 0{,}4$ alors $P(A \cup B)$ est égale à ....

   a 0,3 b 0,7 c 0,9 d 0,6

4. Si X est une variable normale, de moyenne $\mu = 45$ et d'écart- type $\sigma = 5$, alors $P(x \geqslant 55)$ ....

   a 0,4772 b 0,9772 c 0,0228 d 0,2386

5. Si l'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 3 - x$; alors la corrélation entre les variables X et Y est :

   a nul b directe c inverse d parfaite

(b) Si les notes des élèves d'une école suivent une distribution normale de moyenne $\mu = 42$ et d'écart-type σ, Sachant que 26.11% des élèves ont obtenu des notes supérieures à 50: Trouvez σ.

Deuxième question:

(a) **A l'aide du tableau suivant Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, en précisant sa nature:**

x	1	2	3	4	5	6
y	35	12	17	25	12	7

(b) Si A et B sont deux événements dans l'univers d'une expérience aléatoire, $P(A \cup B) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A') = 0{,}3$ Calculez $P(B' \mid A)$

Troisième question :

(a) Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + K & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{Zèro} & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvez la valeur de k puis trouvez $P(1{,}5 \geqslant X \geqslant 2{,}5)$

(b) Si A et B sont deux événements indépendants tel que $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}24$ Calculez $P(A \cup B')$ et $P(A \cup B)$

Quatrième question:

(a) **Les faces opposées du 1ère dé portent le même chiffre des 1 ; 3 ; 5. Les faces opposées d'un 2ème dé portent le même chiffre des 2 ; 4; 6 . On jette les deux dés à la fois et on note le nombre apparu sur les faces supérieures. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme de deux nombres indiqués sur les faces supérieures. Dresser le tableau donnant la lois de probabilité de X . puis calculez l'espérance et le coefficient de variation.**

(b) **l'information suivante donne les frais Yet le revenu X e L.E. d'une échantillon :**

x	50	60	45	70	65	90
y	45	35	35	50	55	70

Premièrement: Estimez les frais si le revenu été 63

Deuxièmement: Calcule l'errer quand $x = 45$

Table des aires sous la courbe normale centrée réduite

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0. 1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2160	0.2224
0.6	0.2259	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3815	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

Réponses des exercices

Unité 1: Corrélation et régression

Réponses des exercices (1 - 1)

(1) d (2) d (3) b (4) c

(5) d (6) 0,9 $r \simeq$ 0,947 directe

(7) 0,8857 (8) - 0,985 inverse

(9) 0,3375 directe (10) - 0,41 inverse

(11) - 0,74 inverse (12) $\simeq$ - 0,91 inverse

(13) 0,7285714 (14) 0,166 directe

(15) 0,8545 directe (16) 0,8661 directe

Réponses des exercices (1 - 2)

(1) b (2) b (3) c (4) a

(5) d (6) d

(7) $y = 0,7 + 0,723\,x$,

$\simeq$ 9,376

(8) a $\simeq$ 8,8592 b = 1,2868

(9) a $\simeq$ 0,69999 b $y = 2,8x - 12,4$

(10) a $y = 36,85 - 0,6333x$

b - 0,9237 inverse

(11) a - 0,915227 inverse

b $y = 94,493 - 9,5628\,x$

(12) a 0,76856 directe.

b $y = 8,4825 + 0,40381\,x$

c $y \simeq$ 28,67 L.E

d 28 erreur = 3,37

(13) a $y = 1,35\,x - 0,375$

b $\simeq$ 944,63.

Réponses des exercices généraux

(1) a (2) c (3) d (4) d

(5) b (6) a

(7) $r \simeq$ 0,47 directe

(8) $r \simeq$ 0,931 directe

(9) $r \simeq$ 0,81 directe.

(10) $r \simeq$ -0,41 inverse (11) $r \simeq$ 0,89337

(12) a $r \simeq$ 0,55296

b $y = 2,8223 + 0,3249\,x$ $y \simeq 5,096$

(13) $r \simeq 0,93$, $y^8 \simeq 11$

(14) a $y = 11,5483 - 0,2053\,x$

b $y \simeq 3,334858$

c erreur = $|3,334 - 4,77| \simeq 1,439$

Réponse de l'épreuve cumulative

(1) a (2) c (3) c (4) a

(5) c (6) b

(7) Si le signe est positif, alors la corrélation est directe et s'il est négatif alors la corrélation est inverse.

(8) a $r \simeq$ - 0,5211

b $y^8 = 135,17 - x$,$y^8 \simeq 73,17$

c erreur = $|72 - 69,17| = 2,83$

(9) a $r \simeq$ - 0,9426

b $y^8 = 10,38 - 0,154\,x$

c 4,22

d erreur $\simeq$ 1,528

Unité 2: Probabilité conditionnelle

Réponses des exercices (2 - 1)

(1) b (2) a (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

(5) a

(6) **Premièrement:** 0.21 **Deuxièmement** 0,89

Troisiément: 0,525 **Quatriémement:** $\frac{19}{30}$

(7) $\frac{3}{5}$ (8) **Premièrement:** $\frac{2}{5}$ **Deuxièmement:** $\frac{29}{35}$

(9) $\frac{2}{3}$ (10) **Premièrement:** $\frac{1}{6}$ **Deuxièmement:** $\frac{1}{2}$

(11) 0,42

(12) **Premièrement:** $\frac{11}{15}$ **Deuxièmement:** $\frac{3}{5}$

Troisiément: $\frac{1}{3}$

13 **Premièrement:** $\frac{1}{11}$ **Deuxièmement:** $\frac{1}{4}$
Troisiément: $\frac{4}{9}$

14 $\frac{1}{4}$

15 **Premièrement:** $\frac{1}{10}$ **Deuxièmement:** $\frac{7}{16}$

16 $\frac{3}{4}$

17 **Premièrement:** $\frac{4}{11}$
Deuxièmement: $\frac{5}{33}$ **Troisiément:** $\frac{35}{132}$

18 **Premièrement:** $\frac{26}{35}$ **Deuxièmement:** $\frac{55}{113}$

19 **Premièrement:** $\frac{5}{7}$
Deuxièmement: $\frac{1}{2}$ **Troisiément:** $\frac{13}{30}$

20 **Premièrement:** $\frac{3}{4}$ **Deuxièmement:** $\frac{1}{2}$
Troisiément: $\frac{3}{16}$ **Quatriémement:** $\frac{13}{14}$

21 **Activité:** **Premièrement:** $\frac{5}{6}$
Deuxièmement: $\frac{2}{3}$

Réponses des exercices (2 - 2)

1 a , c , g sont des événement indépendants.
b, d, e, f dépendants

2 c **3** b **4** d **5** $\frac{1}{12}$

6 $\frac{1}{16}$ **7** a , b sont des événement indépendants

8 **Premièrement :** 0,2 **Deuxièmement:** $\frac{2}{7}$

9 $\frac{1}{4}$ **10** $\frac{1}{15}$

11 a $\frac{3}{95}$ b $\frac{9}{190}$
c $\frac{15}{190}$ d $\frac{2}{95}$

12 **Premièrement:** a 0,28 b 0,82
c 0,54 d 0,72
Deuxièmement: $\frac{2}{5}$

Réponse des exercices généraux

1 c **2** b **3** d **4** c

5 a **6** $\frac{1}{10}$ **7** $\frac{2}{5}$

8 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{8}$

9 a $\frac{5}{96}$ b $\frac{15}{96}$ c $\frac{1}{16}$ d $\frac{3}{16}$

10 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ 1

11 a $\frac{1}{6}$ b $\frac{5}{9}$ c $\frac{4}{9}$

12 a 0,48 b 0,92 c 0,8

13 a $\frac{9}{65}$ b $\frac{24}{65}$ c $\frac{16}{65}$ d $\frac{16}{65}$

14 a $\frac{1}{5}$ b $\frac{1}{4}$

15 a $\frac{16}{25}$ b $\frac{3}{4}$ c $\frac{1}{5}$

16 a $\frac{1}{4}$ b $\frac{2}{9}$

Réponse de l'épreuve cumulative

1 Zèro **2** $\frac{1}{6}$ **3** $\frac{2}{5}$ **4** 1

5 b **6** b **7** c **8** $-\frac{45}{56}$

9 a $\frac{14}{15}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{5}$

10 a $\frac{33}{95}$ b $\frac{21}{95}$ c $\frac{14}{95}$

Unité 3: variable aléatoire et distribution de probabilité

Réponses des exercices (3 - 1)

1 c **2** a **3** b **4** a

5 d **6** d

7 a $\frac{1}{8}$ b $\frac{1}{10}$ g $-\frac{4}{5}$ **8** 0,1

9 m = 1

x_i	- 2	0	2	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

10 a = 3

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	$\frac{9}{54}$	$\frac{12}{54}$	$\frac{15}{54}$	$\frac{18}{54}$

11 k = 5

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	$\frac{8}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{17}{50}$

12

x_i	-3	-1	1	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

13

x_i	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

14

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

15

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

16 ensemble d'image de x = { 0; 1; 2; 3}

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

17 Activité :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Premièrement: a $\frac{1}{2}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{5}{6}$ d $\frac{15}{36}$

Deuxièmement: la valeur de l'espérance est 7

Réponses des exercices (3 - 2)

1 b **2** b **3** c

4 $\mu = \frac{11}{3}$ $\sigma = \sqrt{5}$

5 $\mu = -\frac{23}{24}$ $\sigma \simeq 2{,}51$

6 $\mu = \frac{5}{12}$ $\sigma \simeq 1{,}55$

7 **Premièrement:** a = 0,4

Deuxièmement: $\mu = 3$ `$\sigma \simeq 1{,}55$

8 $\mu = 2{,}6$ ${}^2\sigma = 0{,}96$

9 **Premièrement:** $\frac{11}{16}$

Deuxièmement: n = 2, $\sigma^2 = 1$

10 **Premièrement:** $r = \frac{1}{3}$

Deuxièmement: distribution de probabilité:

x_r	- 3	Zèro	3	6
$f(x_r)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$

$\mu = \frac{5}{3}$ $\sigma^2 \simeq 14{,}2$

11 a = 6 , $\sigma^2 = 1{,}55$

12 **Premièrement:** $a = \frac{13}{2}$

Deuxièmement: $\mu = \frac{7}{3}$ $\sigma^2 = \frac{5}{9}$

13 **Premièrement :** a = 18

Deuxièmement: Coéfficient de variation = 37,7 %

14 **Premièrement:** m = - 1

Deuxièmement: $\mu = \frac{5}{8}$, $\sigma^2 = \frac{135}{64}$

15 **Premièrement:** $a = \frac{20}{19}$

Deuxièmement: $\mu = \frac{23}{19}$, $\sigma^2 = 1{,}2$

16 **Premièrement:** $P(x = 0) = \frac{1}{8}$

$P(x = 2) = \frac{5}{8}$

Deuxièmement: Coéfficient de variation = 132,3%

17 **Premièrement:** $a = \frac{1}{12}$ k = 3

Deuxièmement: $\sigma = 1{,}15$

Réponses des exercices (3 - 3)

1 b **2** a **3** a

4 **Premièrement:** $\frac{1}{4}$ **Deuxièmement:** $\frac{7}{2}$

5 **Premièrement:** $\frac{3}{4}$ **Deuxièmement:** $\frac{5}{12}$

6 **Premièrement:** f (x) fonction de densité

Deuxièmement: $\frac{20}{27}$

7 **Premièrement:** $\frac{4}{9}$ **Deuxièmement:** $\frac{7}{9}$

8 **Premièrement:** $a = \frac{1}{8}$ **Deuxièmement:** $\frac{1}{2}$

9 **Premièrement:** a = 0 **Deuxièmement:** $\frac{1}{2}$

10 **Premièrement:** $a = \frac{1}{4}$ **Deuxièmement:** $\frac{1}{2}$

11 **Premièrement:** k = 8 **Deuxièmement:** $\frac{3}{16}$

12 **Premièrement:** $\frac{1}{4}$ **Deuxièmement:** $\frac{7}{2}$

13 **Premièrement:** a = 1 **Deuxièmement:** b = 2

Réponse de l'exercices généraux de l'unité 3

1 c **2** a **3** a

4

x_r	- 3	- 1	0	1	3
$f(x_r)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{9}$

5 ∴ m = - 1

x_r	-2	-1	1	2
$f(x_r)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$

6 $a = \frac{1}{7}$ $\frac{5}{14}$

7

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

8 **Premièrement:**

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

Deuxièmement: $\frac{7}{9}$

9

x_i	3	5	7	9	11
$f(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$\mu = 7$, $\sigma \simeq 2{,}3094$

10

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$f(x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\mu = 5$, $\sigma \simeq 1{,}581$

11 $b = \frac{1}{6}$, $a = 3$ $\sigma \simeq 1{,}08$

12 **Premièrement:** $\frac{3}{8}$
Deuxièmement: $\frac{27}{32}$

13 **Premièrement:** a = 2 **Deuxièmement:** $\frac{7}{16}$

Réponse de l'epreuve cumulative Unité 3

1 $\frac{5}{11}$ 2 2,16 3 0,38 4 0,38

5 **Premièrement:** $\frac{1}{3}$ **Deuxièmement:** $\frac{2}{3}$

Unité 4: Distribution normale

Réponses des exercices (4 - 1)

1 a 0,3749 , 0,4922 b 0,0160 , 0,4484
c 0,516 , 0,901 d 0,9447 , 0,6971
e 0,0757 , 0,0669 f 0,1609 , 0,1337
g 0,0749 , 0,0202 h 0,8729 , 0,9898
i 0,7422 , 0,9222 j 0,3264 , 0,0548

2 a 1,06 b -1,35 c 0,28 d 1,97
e - 0,85 f 1,32 g - 2,61
h - 0,84 i 0,65 j - 0,33

3 a - 0,94 , 0,7818 b 2,04 , 0,2670
c 1,25 , 0,6524 d 1,83 , 0,9664
e 2,67 , 0,9154 f - 1,3 , 0,6766

4 a $\sigma = 8$ b $\sigma = 7{,}5$ c $\mu = 40$
d $\mu = 60$ e $\mu = 50$ f 0,58
g k = 38 h k = 80 i k = 52

5 a k = 137,5 b $\mu = 45$
c **Premièrement:** k = 10,5 **Deuxièmement:** 0,8413
d 0,2902
e **Premièrement:** 1,91 **Deuxièmement:** k = 1,65
f **Premièrement:** 0,1151 **Deuxièmement:** 0,5403
g **Premièrement:** 0,0446 **Deuxièmement:** 0,8185
h **Premièrement:** 0,8274 **Deuxièmement:** 52,5
i **Premièrement:** 0,6247 **Deuxièmement:** 0,8413
j **Premièrement:** 0,0401 **Deuxièmement:** 0,6147
k **Premièrement:** 0,1056 **Deuxièmement:** 10,5

Réponses des exercices (4 - 2)

1 0,6247 , 841 familles
2 49,67% , 159 étudiants
3 62 étudiants. 4 1547 étudiants
5 a 20 familles b 465 L.E
6 a 0,1056 b 179 familles
7 0,9525 8 442 employées

9 a 0,8413 b 0,0928

10 a 0,6451 b 0,2119
c 0,2382

11 a 977 jeunne hommes
b 67 jeunne hommes

12 16

13 a $\sigma = 11{,}36$ b 587 étudiants

14 a 49,67 % b 159 étudiants

15 $\sigma = 12{,}5$

16 5 étudiants

17 971 cylindres

18 0,8417

19 $\mu = 170$

20 a 0,8413 b 0,9544

21 $\mu = 50$

22 a 0,5328 b 0,5987

23 a 0,9835 b 0,1949

Réponse de l'exercices généraux de l'unité 4

1 0,0228

2 $\mu = 77{,}6$

3 $\sigma = 7{,}5$

4 a 0,7734 b 0,8012 c 0,9332

5 $\mu = 16$, $\sigma = 4$

6 a 0,9544 b 0,1535

7 a $\mu = 25$ b $\mu = 20$
c $\sigma = 10$

8 a 0,0228 b K = 40

9 a a = 99,36 b 0,0062
c 0,0228 d 0,7888

10 a $\mu = 48$ b 0,4013

11 a 1,25 b 1,22

12 a 0,5 b 0,5
c 0,6826 d 0,0228
e 0,8185 f 0,3830

13 a a = 0,93 b a = 1,48

14 K = 90,6

15 a $\mu = 55$ b $\mu = 37{,}5$

16 0,3153

17 a 0,0228 b 89,44 %
c 187 employées

18 a 154 employées
b 20 employées

19 a 0,8413 b 95,44 %

Réponse de l'épreuve cumulative

1 **Premièrement:** a $\frac{2}{3}$ b $\frac{1}{3}$
Deuxièmement: oui car l'intérsection est ϕ

2 a $\frac{1}{6}$ b $\frac{1}{2}$

3 a 0,8
b y = 0,0428571 x + 8,571435
c y = 94,29

4 a k = 1 b $2\frac{1}{9}$
c $\frac{4}{9}$

5 **Premièrement:** a $\frac{1}{6}$ b $\frac{2}{3}$
Deuxièmement: $\frac{1}{12}$

6 170 cm

7 0,52857 directe